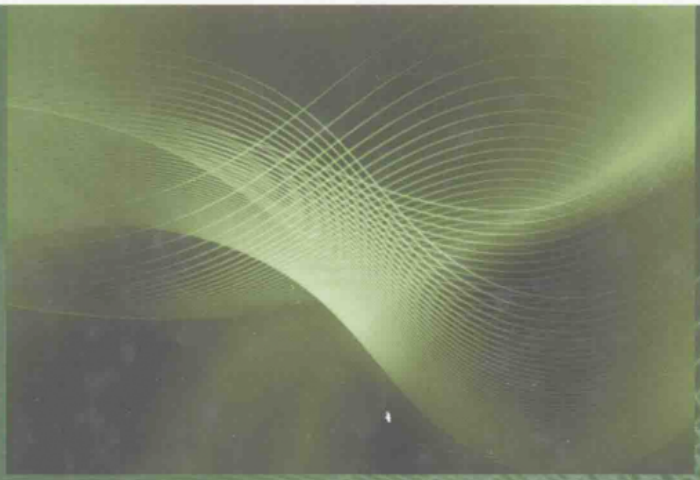
上海科技专著出版资金资助
上海交通大学学术出版基金资助

微分包含控制系统理论

The Theory for Control Systems Described by Differential Conclusions

韩正之 蔡秀珊 黄 俊 著



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

巍巍交大　百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

责任编辑　徐文洁
　　崔　霞
封面设计　朱　懿
责任营销　单元响

微分包含控制系统理论

The Theory for Control Systems Described by Differential Conclusions



ISBN 978-7-313-10252-2
9 787313 102522
定价: 58.00元

本书出版由上海科技专著出版资金和上海交通大学学术出版基金资助

微分包含控制系统理论

The Theory for Control Systems Described by Differential Conclusions

韩正之　蔡秀珊　黄　俊　著

上海交通大學出版社

内容提要

本书是研究有限维微分包含控制系统的专著。全书分成两部分。第1部分介绍微分包含理论。第1章扼要介绍凸分析。第2章讨论微分包含。作者将当前微分包含系统主要研究成果，归纳成集合值映射、集合值映射的选择、微分包含系统解的存在性定理、微分包含系统解的定性分析、微分包含系统的稳定性和单调微分包含等六方面进行介绍。第3章到第5章是第二部分，研究微分包含控制系统。第3章研究凸过程，它可以看成线性系统在集合值映身中的一种合理推广。介绍了凸过程的主要性质，有限维凸过程的构造，凸过程的能控性和稳定性。第4章在介绍了凸包 Lyapunov 函数之后，研究了它在镇定、干扰抑制和饱和控制中的应用。第5章讨论鲁里叶型微分包含系统的镇定和观测，重点研究了 Leunberger 型观测器、线性观测器和自适应观测器的设计。

本书内容安排深入浅出，论证严谨，解释清晰，语言简洁，对每一节都设计了一些练习题以启发思考。本书可以作为数学专业和控制专业研究生的专业教材，也可以供工程技术人员进修之用。

图书在版编目(CIP)数据

微分包含控制系统理论/韩正之，蔡秀珊，黄俊著. — 上海：上海交通大学出版社，2013
ISBN 978-7-313-10252-2

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①韩… ②蔡… ③黄… Ⅲ. 微分包含—控制系统—研究 Ⅳ. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 200089 号

微分包含控制系统理论

著　　者：韩正之　蔡秀珊　黄　俊
出版发行：上海交通大学出版社
邮政编码：200030
出 版 人：韩建民
印　　制：浙江云广印业有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
字　　数：366 千字
版　　次：2013 年 11 月第 1 版
书　　号：ISBN 978-7-313-10252-2/TP
定　　价：58.00

地　　址：上海市番禺路 951 号
电　　话：021-64071208
经　　销：全国新华书店
印　　张：16.75
印　　次：2013 年 11 月第 1 次印刷

版权所有　侵权必究
告读者：如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系
联系电话：0573-86577317

出 版 说 明

科学技术是第一生产力。21 世纪，科学技术和生产力必将发生新的革命性突破。

为贯彻落实“科教兴国”和“科教兴市”战略，上海市科学技术委员会和上海市新闻出版局于 2000 年设立“上海科技专著出版资金”，资助优秀科技著作在上海出版。

本书出版受“上海科技专著出版资金”资助。

上海科技专著出版资金管理委员会

前　言

至今为止的控制理论的历史，可以用它采用的数学模型来断代。

1788 年，James Watt 完成了他关于蒸汽机的第三项发明：离心调速仪(centrifugal governer)。蒸汽机由此摆脱了输入蒸汽气压忽高忽低的困惑，使得输出的转速能够控制在一个基本恒定的状态。瓦特蒸汽机由此第三项发明而完全定型，走向广泛的应用，为第一次工业革命解决了能源问题。离心调速仪被认为近代科学史上第一个设计目标明确的反馈(当时还没有这个名词)控制装置，它的结构简单、工作原理也非常简单。这么简单的一个装置为什么能够有效地调节转速？其背后的机理自然而然地引起众多物理学家的兴趣，他们纷纷寻觅、上下求索，希望发现能够镇定对象的工作原理，其中包括了 James C. Maxwell。Maxwell 在 19 世纪中期曾经用微分方程来探讨离心调速仪的工作原理，但没有记载说明他有突破性的进展。

如果将由离心调速仪引起的对于控制器功能实现的研究称作控制理论的萌发阶段，那么这个阶段采用的数学模型是微分方程。萌发阶段最辉煌的成果是在 19 世纪后期关于微分方程的研究，必须提及的代表人物有法国数学家 Jules Henri Poincaré 和俄国物理学家 Aleksandr M. Lyapunov。前者对不动点进行了分类，创立了微分方程定性理论，为以后称做动力学系统理论的学科奠定了基础；后者则建立了完整的运动稳定性理论，定义了 Lyapunov 稳定性，提出了著名的 Lyapunov 方法和 Lyapunov 定理。

众所周知，稳定性理论一直是控制理论的基础。据此而论，控制理论在其萌发阶段已经很有成就了。然而，尽管稳定性理论是从实际控制系统出发研究的，尽管当时就被冠以“运动稳定性”这样的名衔，但是这些成就还是未能达到足以促成控制理论诞生的能级。究其原因一来是其中控制的作用不突出，二来在当时微分方程的光辉如日中天，表现在控制的萤火之光被完全遮掩了。只是有一点可以肯定，当时研究采用的模型是微分方程。

到了 20 世纪的 30 年代，控制理论终于有了自己的标志性成就：Nyquist 稳定判据和 Bode 图。这些成果是采用频率特性表述的，Nyquist 稳定判据是用开环的频率特性来判别闭环系统稳定性的，而 Bode 图提供了一种由频率特性来近似求取传递函数和进行系统设计的简便而有效的技术。从 1938 年开始，Bode 图的发明者 Herdrik W. Bode 和 Norbert Wiener(以后成为控制论的创始人)致力于雷达自动跟踪和火炮自动瞄准技术研究，前者研究控制系统的工程设计，后者研究系统中的信号处理。他们的成功为二次大战中盟军的空防能力带来革命性的突破，法西斯的空中优势遭受到致命打击，一定程度促成了胜利的早日到来。由于战争的需要，这项技术一度保密，一旦大战结束，控制理论，或者用当时的称呼伺服原理，作为一项新技术脱颖而出就势在必然了。后人将在 20 世纪 30 到 50 年代建立的控制理论称为经典控制理论，并称之为“白纸加铅笔”的理论，它采用的数学模型是传递函数，或者等价地，是频率特性。

相对于萌芽阶段的理论，经典控制理论最大的特点，或者说扬名立万的根本原因是它贴近工程，具有可算性。凡是参加过控制系统设计的人都会有体会，根据物理、化学或者其他学科的定理或定律，给对象建立一个可用的微分方程模型是非常困难的工作，即使像电动机这样简单的对象。然而用传递函数作为数学模型，只要一个信号发生器和一台示波器就可以通过Lissajous图形获得对象的增益特性和相位特性，然后应用Bode图就能近似地获得它的传递函数；进一步还可以应用Bode图对对象进行补偿，改善性能指标、达到预定要求。整个过程只要用“白纸加铅笔”，非常匹配工程师们的口味，便捷性和有效性使得控制理论立即成为工程界的前沿理论，风靡一时也不足为怪了。

时代的步伐带动人们不断高攀的欲望，在新发明带来的一阵燥热之后，冷静下来紧接着的就是不满及对新发明的企盼。这就是科学发明的动力。以传递函数为模型的经典控制理论在处理单输入单输出系统时显得游刃有余，但一旦面对多个输入或者多个输出的系统时，输入输出间的耦合和牵制使得基于Bode图的分析和设计方法捉襟见肘、力不从心。也有人试图将传递函数推广成传递函数矩阵，但是，总因为模型和方法的局限，无功而返。到了20世纪60年代，控制理论的突破终于等来了。后来被称为现代控制理论之父的Rudolph E. Kalman又想起了微分方程。在1960年召开的首届IFAC世界大会上，Kalman定义了控制系统的状态，提出用状态空间模型(一阶微分方程组)来描述控制系统，并应用状态空间模型建立了能控性和能观性的概念。Kalman的创造并没有立即得到认可，直到1962年他应用能观性提出了Kalman滤波算法，并在航天工程中得到成功的应用，人们才对状态空间法刮目相看，并将状态空间法和先前提出的极大值原理一起称为现代控制理论。1982年，Kalman访问中国，当有人问及Kalman滤波和Wiener滤波的区别时，Kalman反问道：“为什么苏联人先成功发射载人飞船，但却是美国人先登月？”在数秒钟的停顿之后，他诙谐地、而又不无得意地说：“因为当时的苏联人还不懂Kalman滤波！”可以用来佐证Kalman说法的事实是，至今我们在处理“嫦娥”和“神舟”发回的信息时，主要还是应用Kalman滤波技术。

可以毫不犹豫地断言采用状态空间描述是现代控制理论区别于经典控制理论的根本特征。采用状态空间描述使得多变量系统可以与单变量系统完全一样地处理，彻底突破了经典控制理论系统分析和设计方法的局限。能够应用状态空间模型进行控制系统设计，很大程度上得益于计算机技术的发展，应用计算机来求一个微分方程的数值解恰如探囊取物。现代控制理论顺天应时，借助现代计算能力使得控制系统设计从“白纸加铅笔”中解放出来。由于状态比输出包含更多的系统运行的信息，因而针对状态的设计手段更丰富，效果更突出。还不到20世纪末，以状态空间法为基础的计算机控制已经几乎完全取代了传统的控制技术。

20世纪70年代以后，不止一次地听到新一代的控制理论诞生的宣言，一会儿是“大系统理论”，一会儿是“智能控制理论”，尽管喧嚣一时，尽管这些领域的理论和实践也都在不断推进，但是要说是新一代的控制理论，却从来没有得到普遍的认同。但是有一点是可以肯定的，那些标榜新一代理论诞生的一个主要依据就是更新了数学模型，由此进一步见证了模型对于理论发展的重要意义。

可能是受到 Kurt Godel 不完备定理的冲击，或者 Werner Heisenberg 测不准原理的影响，到了 20 世纪后期，“不确定”三个字同时出现在不同领域的一流科学家的桌面上。随着控制范围越来越广和控制精度越来越高，控制系统设计对过于依赖精确模型的做法日益不满，控制系统的不确定性也因而受到前所未有的关注。鲁棒控制、自适应控制应运而生，可是杯水车薪，还是不能大范围地解决问题。无数事实证明：对于同批生产的同样系统施加同样的输入，产生输出不尽相同，而且还完全不知道产生这些差别的原因，因此根本无从建立模型，也就无从着手实施控制来消除差别。有时候，尽管这种差别不大，但是却会导致完全不同的后果，甚至严重地影响实现预定性能的要求。21 世纪初，在这种背景下控制系统的微分包含描述便红火起来了。

动态系统一般用$\dot{x}=f(x,u)$来描述，其中的 $f(x,u)$是一个确定的函数。如果系统存在莫名其妙的不确定性，即对于一个确定的输入 $u=u(t)$和确定的初始状态 $x(t_0)=x_0$，系统的状态 $x(t)$不再是一个时间 t 的确定函数，也就是说 $f(x,u)$不再是一个函数，而是一个集合值映射，即 $F(x,u)=\{f_1(x,u),f_2(x,u),\cdots,f_p(x,u)\}$（为了区别函数，用 $F(x,u)$表示集合值映射）。相应地，系统的模型就要改写成$\dot{x}\in F(x,u)$。$\dot{x}\in F(x,u)$就是微分包含，是一种新的模型。人们不禁猜想，研究的模型换成微分包含是不是意味着新一代控制理论的诞生？回答：“不知道。”因为尽管目前还未见端倪，但是要否定也为时过早。

应用微分包含来描述控制系统一方面由于实际需要，另一方面也是由于微分包含理论的发展。国内没有看到考察微分包含历史的研究和报道。根据 J-P Aubin 和 A. Cellina 在 *Differential Inclusions—Set-Valued Maps and Viability Theory*[1] 一书中的介绍，微分包含的雏形最早出现是 20 世纪 30 年代。50 年代以后获得了数学界广泛垂青，因而硕果累累。上述由 J-P Aubin 和 A. Cellina 撰写的著作于 1984 年由 Springer-Verlag 在德国出版，该书几乎囊括了 80 年代之前获得的所有重要结论，被认为是至今为止微分包含理论的经典。该书主要讲述 Hilbert 空间上的微分包含理论。秦松喜将其中上半部分编译由厦门大学出版社出版。G. V. Smirnov 在 2002 年出版了 *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*[2]，这是第一本讲述有限维空间上微分包含的专著，是研究微分包含的控制理论不可不读的经典。

从 20 世纪 70 年代起，控制理论就涉足微分包含，掐指算来也有 40 年历史了。控制理论采用微分包含模型的研究主要有三个阶段：70 年代起，主要工作是将极大值原理推广到微分包含，尽管有所建树，但是不能算有实质性的突破。从 20 世纪后期起，对微分包含系统的能控性有较多的研究，但是对于微分包含系统，能控性在系统设计中的作用还很不清楚，因此其结论没有受到足够的重视。进入 21 世纪，出现了对线性多胞体系统的控制和对 Luré 型微分包含系统的观测方面的研究。这些工作是真正可以算做控制系统设计的内容，就此而言，这些成果给微分包含控制理论带来了突破性进展。但作者们还不认为可以算是新一代的控制理论，还有待于应用领域的检验。自本世纪初作者们就以极大的热情关注着微分包含控制理论的进展，并做了一些有益的研究。作者们从自身的研究过程中深切体会国内这个领域资料的缺乏，于是萌发写一本专著的愿望，并花了约 5 年的时间完成本书的初稿。

本书的安排如下：第 1 章介绍一些基础知识。微分包含理论可以看成是泛函分析和微分方程理论的有机结合，因此选择将泛函分析的基础知识作为阐述的起点，在这一章介绍凸分析作为全书的基础。鉴于国内控制界对这部分内容可能不很熟悉，对部分重要的结论稍加证明和分析。第 2 章是微分包含基础理论，集中介绍有限维空间上的微分包含。先介绍集合值映射，讲述集合值映射的定义、性质、微分和选择，其中选择是集合值映射特有的课题；随后介绍微分包含解的存在性、稳定性和其他的定性性质，其中包括 Fillipov 对不连续微分方程的讨论；最后研究单调微分包含。可以说，这一章归纳了有限维微分包含的主要性质，而且对几乎所有的结论都给出了比较详细的证明，对于那些在 Hilbert 空间也成立的结论都做了说明。第 3 章介绍凸过程。凸过程可以看成是线性映射在集合值映射下的一种推广，也是最具有有限维线性微分包含特色的内容，其中关于凸过程的结构分析可以认为是矩阵 Jordan 标准型的推广，有关能控性的讨论可以作为研究微分包含控制系统能控性的基础，有关稳定性的讨论可以认为是 Lyapunov 方法在微分包含系统中的应用。第 4 章和第 5 章论述两类微分包含控制系统。这两类系统可以看成是线性控制系统在集合值映射场合的自然推广。第 4 章讲述线性多胞体系统的控制，主要介绍凸包 Lyapunov 函数的性质和应用，这部分的基础是 Hu 和她的同事们在本世纪初提出的。第 5 章介绍 Luré 型微分包含系统，这类微分包含的集合值运算只出现在非线性环节中，主要研究内容是镇定和观测器设计。

本书由韩正之和他指导的博士生蔡秀珊和黄俊合作完成。蔡秀珊博士毕业后在浙江师范大学工作，黄俊博士毕业后到苏州大学工作。书中第 4 章和第 5 章中包含了他们在博士生期间和毕业后的一部分研究成果。全书由韩正之执笔，经蔡秀珊和黄俊修改后，最终由韩正之定稿。有几个出版社都希望出版本书，作者最后选择了在上海交通大学学术出版基金资助下，由上海交通大学出版社出版。本书的出版还得到上海科技专著资金的资助，本书的研究工作得到了国家自然科学基金几个项目的支持。我的研究生章伟、刘磊坡、张俊峰、沈少捷、王培全等在学期间参加了课题研究，提供了有益的建议，在此一并表示感谢。

由于本书涉及的内容较新，作者们的理解可能会存在片面，恳请读者指教。与作者联系可以通过出版社或者作者们的电子邮件信箱。

韩正之　zzhan@sjtu.edu.cn

蔡秀珊　xiushan@zjnu.cn

黄　俊　cauchyhot@163.com

韩正之

2013 年 4 月 6 日

符 号 说 明

总用大写斜体的英文字母 $A,B,C,M,P,Q,\cdots$ 和大写正体的希腊字母 A,B,$\Phi,\Gamma,\Lambda,\Omega,\cdots$ 等表示集合、映射等数学对象，即如果一个映射用 A 表示，那么这个字母是大写的希腊字母，读音为 alpha。

总用小写斜体的英文字母 $a,b,c,x,y,\cdots$ 和小写斜体的希腊字母 $\alpha,\beta,\varepsilon,\phi,\gamma,\omega,\cdots$ 等表示数或者向量。

如果没有特别的说明，本书采用其他记号意义如下。

□：表示定义、定理、推论或者注释的结束

$\varnothing$：空集

$\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{R},\mathbb{C}$：分别表示自然数集、整数集、实数集和复数集

$\mathfrak{R}$：闭的实数数集，即集合$[-\infty,\infty]$

$\mathbb{R}(\geqslant 0),\mathbb{R}(>0)$：非负实数集和正实数集

$\mathbb{R}^n$：n 维实数空间，总认为它是线性赋范空间

$\|x\|_\alpha(x\in\mathbb{R}^n)$：$\mathbb{R}^n$ 中向量 x 的 α 范数，其中 $\alpha\geqslant 1$，即 $\|x\|_\alpha=(x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$，$x=(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^{\mathrm{T}}$

上标 T：向量或矩阵的转置

$\mathscr{P}A$：集合 A 的幂集

A'：集合 A 的导集

A^{c}：集合 A 的补集

int A：集合 A 的内点所成集合

re int A：集合 A 的相对内点所成集合

cl A：集合 A 的闭包

bd A：集合 A 的边界

re bd A：集合 A 的相对边界

co A，$\overline{\mathrm{co}}\,A$：集合 A 的凸包和闭凸包，即

$$\mathrm{co}\,A=\left\{x;x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i,a_i\in A,\lambda_i\in\mathbb{R}(\geqslant 0),\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,n\in N\right\},\overline{\mathrm{co}}\,A=\mathrm{cl}\,\mathrm{co}\,A$$

car A：集合 A 的承载子空间

$\sup\{x;x\in A\}$：集合 A 的上确界

$\inf\{x;x\in A\}$：集合 A 的下确界

$\pi(x,A)$：向量 x 在集合 A 上的投影，即 $\pi(x,A)=\{y;d(x,y)=d(x,A)\}$

K^*：锥 K 的共轭锥

$A\times B$：集合 A 和 B 的 Cartesian 积

dom M：关系、映射 M 等的有效定义域

rag M：关系、映射 M 等的值域

X^*：线性赋范空间 X 的共轭空间

$\mathscr{L}(X,Y)$：线性赋范空间 X 到线性赋范空间 Y 的线性有界算子组成的空间

$A^{\perp}$：集合 A 的正交补子空间

$m(A)$：集合 A 的最小范元

dim H：子空间 H 的维数

X/T：线性空间 X 关于子空间 T 的商空间

$M\oplus N$：子空间 M 和 N 的直和

$d(x,y)$：向量、点 x 和 y 之间的距离

$\langle x,y\rangle$：向量 x 和 y 的内积

$\|y\|_X$：向量 y 在线性赋范空间 X 中的范数

$\lambda\uparrow 0,\lambda\downarrow 0$：变量 λ 单调上升、单调下降到 0

epi f：函数 f 的上行图

lev$(f\leqslant a)$，lev$(f<a)$：分别表示 f 不大于 a、小于 a 的层集

$\arg\min f(x)$：使得 $f(x)$取到极小值的那些 x 组成的集合

$\operatorname{res}_{s_0} g(s)$：函数 $g(s)$在 s_0 处的留数

gra F：集合值映射 F 的图像，即 gra $F=\{(x,y),y\in F(x)\}$

conx$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$：向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的凸组合

$N(x,A)$：集合 A 在向量 x 处的法向量

$T(x,A)$：集合 A 在向量 x 处的切锥

$T_+(x,A)$：集合 A 在向量 x 处的正切锥

$T_-(x,A)$：集合 A 在向量 x 处的伴随切锥

$D^+f(x_0)(v)$：函数 $f(x)$在 x_0 处沿着向量 v 的 Dini 上导数

$D^-f(x_0)(v)$：函数 $f(x)$在 x_0 处沿着向量 v 的 Dini 下导数

$S_{[0,T]}(F,x_0)$：微分包含$\dot{x}\in F(x)$满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的、存在于时间区间$[0,T]$上的解集

$S_{[0,T]}(F,C)$：微分包含$\dot{x}\in F(x)$初值在集合 C 内的、存在于时间区间$[0,T]$上的解集

$R_{[0,T]}(F,x_0)$：微分包含$\dot{x}\in F(x)$满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的、存在于时间区间$[0,T]$上的解在 T 时刻的可达集

P_T：T-能控集

A^*：凸过程 A 的伴随过程

(C,A,B)：线性系统$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$

$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$：线性系统$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$的系统矩阵

$S(x,A)$：集合 A 的支撑函数

$\mu(x,A)$：集合 A 的 Minkovsky 函数

$\delta(x,A)$：集合 A 的指示函数

$\partial f(x_0)$：函数 $f(x)$在 x_0 的次微分

目　录

第 1 章　凸集和凸函数 …… 1

1.1　线性赋范空间 …… 1

1.1.1　集合和映射 …… 2

1.1.2　线性赋范空间 …… 3

1.1.3　基础拓扑 …… 5

1.1.4　极限定理 …… 7

1.1.5　内积空间 …… 9

1.2　凸集 …… 12

1.2.1　凸集及其基本性质 …… 12

1.2.2　凸集的表示 …… 14

1.2.3　分离定理 …… 17

1.3　凸函数 …… 20

1.3.1　凸函数及其基本性质 …… 20

1.3.2　凸函数的例子 …… 22

1.3.3　凸函数的微分 …… 23

1.4　半连续函数 …… 29

1.4.1　半连续函数及其基本性质 …… 29

1.4.2　半连续函数的例子 …… 31

第 2 章　集合值映射和微分包含 …… 36

2.1　集合值映射 …… 36

2.1.1　集合值映射 …… 37

2.1.2　集合值映射的连续性 …… 37

2.1.3　切锥和法锥 …… 42

2.1.4　集合值映射的微分 …… 45

2.2　集合值映射的选择 …… 49

2.2.1　最小选择 …… 49

2.2.2　Micheal 选择定理 …… 51

2.2.3　Lipschitz 逼近 …… 54

2.2.4　不动点定理 …… 58

2.3 微分包含及其解的存在性 …… 60
2.3.1 微分包含问题的提出 …… 61
2.3.2 微分包含 Cauchy 问题解的存在性 …… 64
2.3.3 时滞微分包含解的存在性 …… 71
2.4 微分包含解的定性分析 …… 73
2.4.1 Lipschitz 微分包含解的定性分析 …… 73
2.4.2 上半连续微分包含解的分析 …… 75
2.4.3 凸化微分包含和松弛定理 …… 79
2.5 微分包含系统的稳定性 …… 84
2.5.1 Dini 导数 …… 84
2.5.2 微分包含系统的稳定性 …… 86
2.5.3 微分包含系统稳定性的类 Lyapunov 判据 …… 88
2.6 单调微分包含 …… 94
2.6.1 单调微分包含及其基本性质 …… 94
2.6.2 Minty 定理 …… 96
2.6.3 Yosida 逼近 …… 99
2.6.4 极大单调微分包含 …… 101

第 3 章 凸过程 …… 105
3.1 线性赋范空间上的凸过程 …… 105
3.1.1 凸过程及其伴随过程 …… 106
3.1.2 凸过程的范数 …… 109
3.1.3 凸过程的基本定理 …… 110
3.2 有限维空间的凸过程 …… 114
3.2.1 伴随过程 …… 114
3.2.2 凸过程的结构 …… 116
3.3 凸过程微分包含的能控性 …… 125
3.3.1 T-能控性 …… 125
3.3.2 能控性 …… 130
3.4 凸过程微分包含的稳定性 …… 133
3.4.1 稳定性 …… 133
3.4.2 Lyapunov 函数的构造 …… 138

第 4 章 线性多胞体控制系统 …… 143
4.1 多胞体系统 …… 143

4.1.1　线性控制系统和矩阵不等式 …… 144
4.1.2　线性多胞体系统 …… 147
4.2　凸包 Lyapunov 函数 …… 151
4.2.1　凸包二次型函数 …… 151
4.2.2　凸包二次型函数的层集 …… 153
4.3　线性多胞体系统的控制 …… 162
4.3.1　线性多胞体系统的反馈镇定 …… 162
4.3.2　带有时滞线性多胞体系统的反馈镇定 …… 166
4.3.3　线性多胞体系统的干扰抑制 …… 168
4.4　线性系统的饱和控制 …… 174
4.4.1　线性系统的饱和控制的集合值表示 …… 174
4.4.2　饱和控制的镇定设计 …… 175
4.4.3　饱和控制的干扰抑制 …… 179

第 5 章　Luré 型微分包含系统 …… 183
5.1　Luré 系统 …… 183
5.1.1　Luré 系统和超稳定性 …… 184
5.1.2　正实性和正实性引理 …… 186
5.1.3　超稳定性判据 …… 188
5.2　Luré 型微分包含系统的镇定 …… 192
5.2.1　Luré 型微分包含系统的实际例子 …… 192
5.2.2　Luré 型微分包含系统的镇定 …… 193
5.2.3　系统的零和相对阶 …… 194
5.2.4　反馈正实化 …… 198
5.2.5　反馈镇定——单变量系统 …… 201
5.2.6　反馈镇定——多变量系统 …… 202
5.3　Luré 型微分包含系统的 Luenberger 观测器和分离设计 …… 205
5.3.1　适定性问题 …… 205
5.3.2　Luenberger 型状态观测器 …… 206
5.3.3　应用观测器的状态反馈 …… 211
5.3.4　降维 Luenberger 型观测器 …… 212
5.4　Luré 型微分包含系统的线性观测器 …… 216
5.4.1　单变量系统 …… 217
5.4.2　多变量系统 …… 222
5.5　Luré 型微分包含系统的 Luenberger 型自适应观测器 …… 224

5.5.1 Luenberger 型自适应观测器 …… 224
5.5.2 Luenberger 型自适应降维观测器 …… 228
5.5.3 自适应观测器仿真例子 …… 229
5.6 Luré 型微分包含系统的线性自适应观测器 …… 233
5.6.1 持续激励 …… 233
5.6.2 自适应线性观测器 …… 239

参考文献 …… 245
索引 …… 247

第1章

凸集和凸函数

本章先概要叙述泛函分析的一些基本内容，主要是线性赋范空间和内积空间的一些结论。然后转入凸分析。依次介绍凸集、凸函数和半连续函数。这些知识对于第2章讲述集合值映射是必须的。

1.1 线性赋范空间

本节介绍一些泛函分析基础知识。可以方便读者的阅读，也可以统一本书采用的记号和定义，同时介绍以后会用到的结论，方便引用。

1.1.1 集合和映射

本书中，一般用大写英文字母 $A,B,\cdots,X,Y$ 表示集合，小写的字母 $a,b,\cdots,x,y$ 表示集合的元素。为了显示集合更多的信息，会采用一些复合记号，例如用 $C([a,b],\mathbb{R})$ 表示定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续实函数组成的集合。不过，每当引入这种记号的时候，都会对其含义给出解释。

有两个集合需要特别提及，一个叫做空集，记为 $\emptyset$；一个叫做全集，记成 Ω，它表示当前考察的最大的集合，其他集合都是它的子集。一个集合称为单元素集，如果它只有一个元素。

A,B 是两个集合，$A\cup B,A\cap B,A\backslash B$ 和 A^c 分别表示它们的并集、交集、差集和 A 的补集。A 的一切子集组成的集合称为 A 的**幂集**，用 $\mathscr{P}A$ 表示。$A\times B$ 表示 A 和 B 的 **Cartesian 积**，即 $A\times B=\{(a,b);a\in A,b\in B\}$，其中记号 (a,b) 表示一个有序对。集合的并、交和补之间存在 de Morgan 公式

$$\bigcup A^c=(\bigcap A)^c;\ \bigcap A^c=(\bigcup A)^c。$$

本书中最常用的集合是数集。用 $\mathbb{Z}$ 表示整数集，$\mathbb{Z}^+$ 和 $\mathbb{N}$ 表示正整数集和自然数集[①]。用 $\mathbb{R}$ 表示实数集，用 $\mathbb{C}$ 表示复数集，但是本书很少用到复数集。$\mathbb{R}^+$ 和 $\mathbb{R}^-$ 分别表示正实数集和负实数集，有时也将它们写成 $\mathbb{R}(>0)$ 和 $\mathbb{R}(<0)$，相应地用 $\mathbb{R}(\geqslant 0)$ 表示非负实数集。在下面的讨论中，常常会将实数集扩展成闭集，即**闭实数集**，用 $\mathfrak{N}$ 表示，$\mathfrak{N}=\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$，用 $\mathbb{R}(\infty)$ 和 $\mathbb{R}(-\infty)$ 分别表示 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 和 $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$。在 $\mathfrak{N}$ 上可以进行加减乘除等算术运算，但是为了使得运算结果是唯一确定的，就像在常规运算中不能让分母为 0 一样，在集合 $\mathfrak{N}$ 上不允许极限运算中所谓的“不定型”运算，例如 $\infty-\infty,0\cdot\infty$ 等等。$\mathbb{R}^n$ 表示 n 维的实数空间，它就是 $\overbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}^{n\text{次}}$。在本书中，$\mathbb{R}^n$ 总是作为线性空间来处理的。

从 A 到 B 的一个**关系**是 $A\times B$ 的一个子集 M。例如 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\},B=\{b_1,b_2\}$，则 $M=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2)(a_3,b_1),(a_4,b_1)\}$ 便是从 A 到 B 的一个关系。定义

$$\operatorname{dom}M=\{a;a\in A,\exists b\in B,b\neq\pm\infty,\text{使得}(a,b)\in M\}$$

和

$$\operatorname{rag}M=\{b;b\in B,\exists a\in A,\text{使得}(a,b)\in M\},$$

分别为关系 M 的定义域和值域。如果 $a\in\operatorname{dom}M,M(a)=\{b;b\in B,(a,b)\in M\}$ 称为是 a 的像集。如果 $b\in\operatorname{rag}M,M^{-1}(b)=\{a;a\in A,(a,b)\in M\}$ 称为是 b 的原像集。$M(a)$ 和 $M^{-1}(b)$ 未必只含一个元素。例如在前面的例子中，$M(a_1)=\{b_1,b_2\},M^{-1}(b_1)=\{a_1,a_3,a_4\}$。像集和原像集的概念可以推广到集合，例如 $S_1\subset\operatorname{dom}M$，则可以定义 $M(S_1)$，又如 $S_2\subset\operatorname{rag}M$，则可以定义 $M^{-1}(S_2)$。

① 本书定义自然数集为 $\{0,1,2,3,\cdots\}$。

从 A 到 B 的关系 f 称为是**映射**，如果对每个 $a\in\mathrm{dom}\,f$，$f(a)$ 是单元素集。尽管映射的像集都是单元素集，但是一个元素的原像集未必是单元数集。当 A 和 B 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 子集的时候，这类映射就称为**函数**。将实数域 $\mathbb{R}$ 扩展到 $\mathfrak{R}$ 之后，函数 $f:A\to\mathfrak{R}$ 与函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 相比，定义域会发生变化，为此定义 $\{x;f(x)\neq\pm\infty\}$ 为 f 的有效定义域。这样一来，当实数域扩展为 $\mathfrak{R}$ 之后，函数的有效定义域不变。在函数的值域中引进无穷大的目的是使得函数连续或者其定义域成为闭集。例如对于函数 $y=\ln x$，在一般意义上，它的定义域是 $(0,\infty)$，引入 $\mathfrak{R}$ 后，它的定义域就成了 $[0,\infty]$。再如对于函数 $y=|x^{-1}|$，在引入 $\mathfrak{R}$ 后它的定义域就成了 $\mathfrak{R}$，而且在 $\mathfrak{R}$ 上连续。

1.1.2　线性赋范空间

A 是一个集合，如果存在函数 $d:A\times A\to\mathbb{R}\ (\geqslant 0)$ 使得：

(1) $d(x,y)=0$，当且仅当 $x=y$。

(2) $d(x,y)=d(y,x)$。

(3) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$，对任意的 $x,y,z\in A$ 成立。

则称 d 为 A 上的一个距离，称 (A,d) 为一个**距离空间**。其中的要求(3)通常称为三角不等式。

设 X 是实数域上的线性空间，如果有一个定义在 X 上函数 $\rho:X\to\mathbb{R}\ (\geqslant 0)$ 满足：

(1) $\rho(x)=0$，当且仅当 $x=0$。

(2) $\rho(ax)=|a|\rho(x)$，其中 $a\in\mathbb{R}$。

(3) $\rho(x+y)\leqslant\rho(x)+\rho(y)$。

则称 ρ 是 X 上的一个**范数**，称 (X,ρ) 是一个**线性赋范空间**，X 的元素称为向量。

为了方便，常将范数 $\rho(x)$ 记做 $\|x\|$。记号 $\|\cdot\|$ 是由实数域上的绝对值 $|\cdot|$ 符号演化而来的。读者不难验证绝对值 $|\cdot|$ 可以看成实数域上的范数。另外，也容易看出范数 $\|x-y\|$ 满足距离的三项要求，因此也可以用来表示 x 和 y 之间的距离。由此可知线性赋范空间必是距离空间。

下面给出一些本书要用到的几个线性赋范空间。

n-维实数空间 $\mathbb{R}^n$。在 $\mathbb{R}^n$ 上可以装备不同的范数，设 $x=(x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$②，对任意的 $\alpha\geqslant 1$，定义 $\|x\|_\alpha=(|x_1|^\alpha+|x_2|^\alpha+\cdots+|x_n|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$，可以验证 $\|\cdot\|_\alpha$ 符合范数的三条要求③，这个范数称为 $\mathbb{R}^n$ 的 α-范数。还可以定义无穷大范数，$\|x\|_\infty=\max\limits_i(|x_i|,i=1,2,\cdots,n)$，之所以称它为无穷大范数和记成 $\|x\|_\infty$，是因为当固定 x，让 $\alpha\to\infty$ 时，$\|x\|_\alpha\to\|x\|_\infty$。书中用得最多的是 2-范数，它也称为 **Euclid 范数**，因此为了简便，将 $\|x\|_2$ 中的下标 2 略去，就用 $\|x\|$ 表示。

从 $\mathbb{R}^n$ 的例子可以看出一个集合上的范数不是唯一的，一般来说不同的范数会使集合具有

② 本书总采用列向量形式，上标“T”表示转置。

③ 本节关于范数验证可以在一般的泛函分析教材中找到，书中不再证明。

不同的拓扑性质。对于有限维线性空间来讲，它各种范数导出的拓扑性质是差不多的。为了叙述一个集合上不同范数之间的关系，先给出下列定义。

定义 1.1.1 设 $\|\cdot\|_a$ 和 $\|\cdot\|_b$ 是线性赋范空间 X 上的两种范数，如果存在常数 C_1，$C_2\in\mathbb{R}(>0)$，使得 $C_1\|x\|_a\leqslant\|x\|_b\leqslant C_2\|x\|_a$ 对所有的 $x\in X$ 成立，那么称范数 $\|\cdot\|_a$ 和 $\|\cdot\|_b$ 拓扑等价。 □

定理 1.1.1 有限维空间的任意两个范数都拓扑等价。 □

定理 1.1.1 揭示了有限维线性赋范空间的本质特性。它说明在讨论有限维空间的连续性、紧性等拓扑性质时，只要任取一种范数进行分析就足够了，甚至在不同场合可以灵活选取范数。

用 $\boldsymbol{C([a,b],\mathbb{R})}$ 表示定义在闭区间 $[a,b]$ 上连续函数全体组成的集合。在 $C([a,b],\mathbb{R})$ 上定义 $\|x(t)\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$，可以证明这个定义符合范数的三个条件，因此 $C([a,b],\mathbb{R})$ 是线性赋范空间。用 $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ 表示定义在闭区间 $[a,b]$ 上的 n 维连续函数全体，如果 $x(t)\in C([a,b],\mathbb{R}^n)$，则对每个 t，$x(t)=[x_1(t)\ \ x_2(t)\ \cdots\ x_n(t)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$，$x_i(t)\in C([a,b],\mathbb{R})$，$i=1,2,\cdots,n$，因此 $C([a,b],\mathbb{R}^n)=(C([a,b],\mathbb{R}))^n$。定义 $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ 上的范数：$\|x(t)\|_\alpha=(\|x_1(t)\|^\alpha+\|x_2(t)\|^\alpha+\cdots+\|x_n(t)\|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$（$\alpha\geqslant1$），其中 $\|x_i(t)\|$ 是 $x_i(t)$ 在 $C([a,b],\mathbb{R})$ 上的范数。$\|x(t)\|_\alpha$ 称为 $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ 的 α 范数。当 $\alpha=2$ 时，$\|x(t)\|_\alpha$ 就记成 $\|x(t)\|$。记号 $\|x(t)\|$ 会有一点歧义。因为按照范数的定义，$\|x(t)\|$ 是一个数，但是另一方面，固定 t，$x(t)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个向量，它可以有 Euclid 范数，即 $\|x(t)\|=\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)+\cdots+x_n^2(t)}$，它是 t 的函数。为了区分，当会产生歧义的时候，记 $\|x(t)\|_{\mathbb{R}}=\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)+\cdots+x_n^2(t)}$。

上述过程给出了从一维向量范数向多维向量范数的推广的标准方法。

用 $L_1([a,b],\mathbb{R})$ 表示定义在闭区间 $[a,b]$ 上的所有绝对可积的函数全体，即 $x(t)\in L_1([a,b],\mathbb{R})$，则 $\int_a^b|x(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$④。可以验证，如令 $\|x(t)\|_1=\int_a^b|x(t)|\,\mathrm{d}t$，则 $L_1([a,b],\mathbb{R})$ 符合线性赋范空间的要求。

类似地，对 $p\geqslant1$，用 $\boldsymbol{L_p([a,b],\mathbb{R})}$ 表示定义在闭区间 $[a,b]$ 上 p 次方 Lebesgue 可积函数组成的集合，它的范数定义为

$$\|x(t)\|_p=\left(\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},$$

$L_p([a,b],\mathbb{R})$ 也是线性赋范空间。

用 $L_\infty([a,b],\mathbb{R})$ 表示在闭区间 $[a,b]$ 上本性有界函数组成的集合，即对于任意的 $x(t)\in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$，必定存在常数 M 和一个零测度集 $E\subset[a,b]$，使得 $|x(t)|\leqslant M$，$t\in[a,b]\backslash E$，这个数 M 可能与 $x(t)$ 有关。在 $L_\infty([a,b],\mathbb{R})$ 上定义

$$\|x(t)\|_\infty=\inf_{E\subset[a,b],E\text{是零度集}}\left(\sup_{t\in[a,b]\backslash E}|f(t)|\right),$$

④ 如果不是特别说明，本书采用的积分都是 Lebesgue 意义上的积分。

则 $L_\infty([a,b],\mathbb{R})$是线性赋范空间。

可以证明，当 $1\leqslant\alpha\leqslant\beta$ 时，这些空间之间关系为

$$L_1([a,b],\mathbb{R})\supset L_\alpha([a,b],\mathbb{R})\supset L_\beta([a,b],\mathbb{R})\supset L_\infty([a,b],\mathbb{R})。$$

应用将范数从 $C([a,b],\mathbb{R})$推广到 $C([a,b],\mathbb{R}^n)$的标准过程，可以定义线性赋范空间 $L_p([a,b],\mathbb{R}^n)$，$p\geqslant1$。这里不予复述。

用 $\boldsymbol{AC([a,b],\mathbb{R})}$表示定义在闭区间$[a,b]$上绝对连续函数全体组成的集合。绝对连续函数是本书的一个常用概念。下面略予介绍。

定义 1.1.2　$f:[a,b]\to\mathbb{R}$，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，对任意多个不重叠的开区间$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n)$，只要满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$，就有 $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$，则称 f 是$[a,b]$上的绝对连续函数。 □

显然一个绝对连续的函数必定是连续的，反之未必成立。关于绝对连续最重要的应用是下面的定理。

定理 1.1.2　$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是绝对连续的充分必要条件是 f 在$[a,b]$上几乎处处可导，而且有 $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$。 □

Newton-Leibniz 公式 $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ 被称为微积分学基本定理，在 Riemann 积分中此公式只在 f'连续的地方成立，但是在 Lebesgue 积分中它对绝对连续函数总是成立的。定理 1.1.2 还说明，一个绝对连续函数总可以由积分上限函数来给出，这个事实提示对于在$[a,b]$上的绝对连续函数 $f(x)$可以定义范数

$$\|f(x)\|=|f(a)|+\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t。\tag{1.1.1}$$

从式(1.1.1)可以看出它满足范数的一切要求，并且进一步可以证明 $AC([a,b],\mathbb{R})$同构于 $\mathbb{R}\times L_1([a,b],\mathbb{R})$的一个子空间(也称它可以嵌入到$\mathbb{R}\times L_1([a,b],\mathbb{R})$)。上述定义可以自动地扩展到 $AC([a,b],\mathbb{R}^n)$。

1.1.3　基础拓扑

本小节中，$\bar{B}=\{x;\|x\|\leqslant1\}$称为是 X 中的闭单位球，简称单位球；$B=\{x;\|x\|<1\}$称为 B 的内部，或者开的单位球。$\bar{B}\backslash B=\{x;\|x\|=1\}$称为单位球的球壳，它是 B 或者 $\bar{B}$ 的边界。

集合 $A\subset X$，$x\in A$ 称为是 A 的内点，如果存在 $\varepsilon>0$，使得 $B(x,\varepsilon)=x+\varepsilon B\subset A$⑤，$B(x,\varepsilon)$

⑤　X 是线性赋范空间$x\in X$，$A\subset X$，则 $x+A=\{x+a;a\in A\}$；类似地 $r\in\mathbb{R}$，$rA=\{ra;a\in A\}$。这些运算是线性空间运算的自然扩展，以后不再特别指出。

称为 x 的 ε 邻域。A 的内点组成的集合称为 A 的内部，记成 intA。x 称为是 A 的聚点，如果对任意 $\varepsilon>0$，$B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$，并存在除 x 之外的 A 中的点；A 的聚点全体称为 A 的导集，记成 A'；$A\cup A'$称为 A 的闭包，记成 clA。cl $A\backslash$int A 称为 A 的边界，记成 bd A。如果 $x\in$ bd A，那么在 x 的任意一个邻域 $B(x,\varepsilon)$中，既有 A 的点又有 A^c 的点。

一个集合称为是**开集**，如果所有的点都是内点；一个集合称为是**闭集**，如果它的补集是开集。根据定义可以看出 int A 总是开集，而可以证明 cl A 总是闭集。进一步 A 是闭集的充分必要条件是：$A\supset$cl A。集合 A 称为有界的，如果存在正数 r 使得 $A\subset r\bar{B}$。

设 $x\in X$，$A\subset X$，定义 $d(x,A)=\inf\limits_{a\in A}\|x-a\|$ 为 x 和 A 之间的距离。如果 A 是一个闭集，那么一定存在 $y\in A$，使得 $\|x-y\|=d(x,y)=d(x,A)$。设 $A_1,A_2\subset X$ 是两个集合，定义 $d(A_1,A_2)=\inf\limits_{x\in A_1,y\in A_2}\|x-y\|$ 为 A_1 和 A_2 之间的距离。当 A_1 和 A_2 都是闭集的时候，必定存在 $x\in A_1$，$y\in A_2$，使得 $\|x-y\|=d(x,y)=d(A_1,A_2)$。

设 $A\subset X$，如果对任意的 $a\in A$，有一个开集 O_a，使得 $a\in O_a$，则称$\{O_a\}$是 A 的一个开覆盖。集合 A 称为是**紧集**，如果对 A 的任意开覆盖，总可以选出有限个开集 $O_{a_1},O_{a_2},\cdots,O_{a_n}$，使得 $O_{a_1}\cup O_{a_2}\cup\cdots\cup O_{a_n}\supset A$。以后将这个性质称为“任意开覆盖存在有限子覆盖”。

对于不同的线性赋范空间，紧集有不同的特征。例如在$\mathbb{R}^n$中，紧集的充分必要条件是有界闭集。在 $C([a,b],\mathbb{R})$中，紧集的充分必要条件是有界的和等度连续的(**Arzela-Ascoli 定理**)。一般来说，发现一个空间中紧集的特征不是一件容易的事。

设$\{x_n;i=1,2,\cdots\}\subset X$[6] 是一个序列，称$\{x_n\}$收敛到 $x_0\in X$，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，$\|x_n-x_0\|<\varepsilon$(或者写成 $x_n\in B(x_0,\varepsilon)$)。这个事实记成$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，或者 $x_n\to x_0(n\to\infty)$。在不至于混淆的时候，其中的记号 $n\to\infty$常常省去。如果非常数序列$\{x_n\}$收敛到 x_0，则 x_0 就是序列$\{x_n\}$唯一的聚点。

$A\subset\mathbb{R}^n$是紧集的充分必要条件是 A 是有界的，并且它的任意一个序列$\{x_n\}$，必含有一个收敛子序列$\{x_{n_k},k=1,2,\cdots\}$，且其极限点也属于 A。这个事实也常称为 **Weierstress 定理**。

$\{x_n;i=1,2,\cdots\}\subset X$ 称为 **Cauchy 序列**，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n,m>N$ 时，$x_n-x_m\in\varepsilon B$。设 A 是线性赋范空间 X 中的一个集合，如果 A 中的任意一个 Cauchy 序列都收敛到 A 中的一个元素，那么称集合 A 是完备的。如果 A 就是空间 X，则称这个空间是**完备空间**。

上面提及的几个空间：$\mathbb{R}^n$，$C([a,b],\mathbb{R}^n)$，$L_p([a,b],\mathbb{R}^n)$和 $AC([a,b],\mathbb{R}^n)$按照给出的范数都是完备的。完备的线性赋范空间称为 **Banach 空间**。对于一个线性赋范空间，我们总能将它稠密地嵌入到一个完备空间，这个结论称为完备化定理。

设 X 和 Y 是两个线性赋范空间，$f:X\to Y$ 是一个映射，f 在 $x_0\in X$ 是连续的，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对所有的 $x\in B(x_0,\delta)$，$\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$，或者表达成 $f(B(x_0,\delta))\subset$

⑥ 为了简便，在不致于混淆的时候，序列$\{x_n;i=1,2,\cdots\}$以后就简化成$\{x_n\}$。

$B(f(x_0),\varepsilon)$。称 f 在 X 上是连续的，是指 f 在每个 $x_0\in X$ 都是连续的。

映射的连续性有很多等价的判据。例如对任意序列 $x_n\to x_0$，成立 $f(x_n)\to f(x_0)$，则 f 在 x_0 是连续的，注意其中两个收敛是按照不同范数进行的。又如对任意的开集 $O\subset Y$，$f^{-1}(O)$ 是 X 中的开集，则 f 在 X 中连续。

本书将要讨论的半连续映射和绝对连续映射都是在连续函数概念上的发展起来的，因此，读者应该熟悉连续映射的性质。

设 X 和 Y 是两个线性赋范空间，$f:X\to Y$ 称为是一个**线性映射**，如果 f 满足：

(1) 对任意的 $x_1,x_2\in X$，$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$。

(2) 对任意的 $x\in X$，$a\in\mathbb{R}$，$f(ax)=af(x)$。

在上述定义中，第一个等式称为可加性，第二个等式称为齐次性。一个线性映射称为有界的，如果存在 $M\in\mathbb{R}$，对一切 $x\in X$ 成立 $\|f(x)\|\leqslant M\|x\|$。对于线性映射来说，有界的充分必要条件是连续。

设 $f:X\to Y$ 是一个有界线性映射，则可以定义它的范数

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup_{x\in X,x\neq 0}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\\ &= \sup_{\|x\|=1}\|f(x)\|\\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|f(x)\|\\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1,x\neq 0}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|},\end{aligned}$$

直接验证可以知道由第一个等式定义的映射的范数满足范数的三项要求。后面的几个等式都可应用线性映射特性证得。

在上述定义中，$\|f\|$ 是依赖于 X 和 Y 的范数的，由于在 X 和 Y 上可以定义不同的范数，因此 $\|f\|$ 也就因此而不同。为了体现 $\|f\|$ 对于 X 和 Y 的依赖，如果 $\|f\|$ 是由范数 $\|x\|_\alpha$ 和 $\|y\|_\beta$ 产生的范数，就记成 $\|f\|_{\beta\alpha}$，这个范数也称为 $\|x\|_\alpha$ 和 $\|y\|_\beta$ 的**诱导范数**。对于诱导范数成立 $\|y\|_\beta\leqslant\|f\|_{\beta\alpha}\|x\|_\alpha$。如果另一个范数 $\|f\|_\gamma$ 虽然不是由 $\|x\|_\alpha$ 和 $\|y\|_\beta$ 诱导而得，但是也满足 $\|y\|_\beta\leqslant\|f\|_\gamma\|x\|_\alpha$，那么称 $\|f\|_\gamma$ 是与 $\|x\|_\alpha$ 和 $\|y\|_\beta$ 相容的范数，简称**相容范数**。

当 $Y=\mathbb{R}$ 时，线性映射 $f:X\to\mathbb{R}$ 就称为线性泛函，所有有界线性泛函组成的空间称为 X 的**共轭空间**，记成 X^*。有定理表明不管 X 是否是完备的，X^* 总是完备的。

1.1.4　极限定理

在微积分理论中引进 Lebesgue 积分，不只是为了对 Newton-Leibniz 公式的成立有一个完善的解释，同时也为了推广极限定理。这一小节介绍 Lebesgue 积分的几个极限定理。从收敛的含义开始。

设$\{x_n(t)\}$是定义在集合$E\subset\mathbb{R}$上的可测函数序列。

称$\{x_n(t)\}$依测度收敛到函数$x_0(t)$，如果对于任意的$\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} m\{t;\|x_n(t)-x_0(t)\|>\varepsilon\}=0$，其中的$m(A)$表示集合$A$的Lebesgue测度。这个事实记为$x_n(t)\xrightarrow{\mathrm{m}}x_0(t)$。

称$\{x_n(t)\}$几乎处处收敛到函数$x_0(t)$，如果$m(E\setminus\{t;\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x_0(t)\})=0$，就是$\{x_n(t)\}$不收敛$x_0(t)$的集合测度为0。这个事实记为$x_n(t)\xrightarrow{\text{a. e.}}x_0(t)$。

称$\{x_n(t)\}$逐点收敛到函数$x_0(t)$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x_0(t)$对所有的$t\in E$成立。这个事实记为$x_n(t)\to x_0(t)$。

称$\{x_n(t)\}$一致收敛到函数$x_0(t)$，如果$\limsup\limits_{n\to\infty\, t\in E}\|x_n(t)-x_0(t)\|=0$。这个事实记为$x_n(t)\xrightarrow{\mathrm{u}}x_0(t)$。

从定义容易得到$x_n(t)\xrightarrow{\mathrm{u}}x_0(t)\Rightarrow x_n(t)\to x_0(t)\Rightarrow x_n(t)\xrightarrow{\text{a. e.}}x_0(t)\Rightarrow x_n(t)\xrightarrow{\mathrm{m}}x_0(t)$，其中最后一个蕴含关系要求$m(E)<\infty$。从依测度收敛到几乎处处收敛有**Riesz定理**。这个定理以后会用到。

定理1.1.3(Riesz定理) 如果$x_n(t)\xrightarrow{\mathrm{m}}x_0(t)$，那么存在$\{x_n(t)\}$的一个子列$\{x_{n_k}(t)\}$，$x_{n_k}(t)\xrightarrow{\text{a. e.}}x_0(t)$。□

需要提醒的是：在上述叙述中，定义域E是在实数集$\mathbb{R}$上的，它的值域可以是随意的$\mathbb{R}^n$，而且它在$\mathbb{R}^n$上的范数也可以任意定义。

考虑上文提及的几个函数空间，在$C([a,b],\mathbb{R}^n)$中，依照范数收敛等价于一致收敛，在$L_p([a,b],\mathbb{R}^n)$中依照范数收敛等价于依照测度收敛，由于$AC([a,b],\mathbb{R}^n)$可以嵌入$\mathbb{R}^n\times L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$，因此依照范数收敛也是等价于初值$x_n(a)$是收敛的和$x_n(t)$在$[a,b]$上依照测度收敛。

现在叙述极限定理。

定理1.1.4 $\{x_n(t)\}$是一个E上可测函数序列，$x_n(t)\xrightarrow{\mathrm{m}}x_0(t)$，而且存在可积函数$F(t)$，使得$|x_n(t)|\leqslant F(t)$对一切$n$成立，那么，$x_0(t)$在$E$上可积，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E x_n(t)\mathrm{d}t=\int_E x_0(t)\mathrm{d}t。$$

□

这个定理通常称为**Lebesgue控制收敛定理**，其中$F(t)$称为控制函数。

定理1.1.5 设$\{x_n(t)\}$是一个E上非负可测函数序列，$x_n(t)\leqslant x_{n+1}(t)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E x_n(t)\mathrm{d}t=\int_E\lim_{n\to\infty}x_n(t)\mathrm{d}t。$$

□

这个定理通常称为**Levi单调收敛定理**。这个定理对$x_n(t)\to\infty$情形也成立。

最后一个定理称为**Fatou引理**。

定理1.1.6 设$\{x_n(t)\}$是一个E上非负可测函数序列，则

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_E x_n(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_E \varliminf_{n\to\infty} x_n(t)\mathrm{d}t。$$ □

注意 Fatou 引理中的不等号是确实可以成立的。

在结束这一小节的时候，给出一些所谓“弱”的概念和结论。设 X 是一个线性赋范空间，集合 $A\subset X$ 称为是有界的，如果存在 M，使得对一切 $x\in A$ 成立 $\|x\|\leqslant M$。集合 $A\subset X$ 称为是弱有界的，如果对一切 $x\in A$ 和每个 $f\in X^*$，如果存在 $M=M(f)$，使得 $|f(x)|\leqslant M$。显然一个集合是强有界的则必是弱有界的。另一方面，设集合 $A^*\subset X^*$ 称为是弱*有界的，如果对每个 $x\in X$ 和一切 $f\in A^*$，存在 $M=M(x)$，使得 $|f(x)|\leqslant M$。相应地可以定义弱紧集合和弱*紧集。关于弱*有界有下面的重要的 **Alaoglu 定理**，其证明可以参阅有关著作，例如[3]。

定理 1.1.7(Alaoglu 定理)　设 X^* 是 Banach 空间 X 的共轭空间，则 X^* 中闭的单位球是弱*紧集。 □

定理 1.1.7 可以推广到 X^* 中的任意有界闭集，它可以应用 Banach 空间中的共鸣定理来证明。这个定理又一次给出了共轭空间的良好性质。

1.1.5　内积空间

在以后的分析中内积占有绝对重要的地位。因此在结束本节前简单介绍一下内积空间。一些进一步的性质在以后用到的时候再作介绍。

设 X 是一个线性空间，如果存在函数 $\rho: X\times X\to\mathbb{R}$ ⑦满足：

(1) $\rho(x,x)\geqslant 0$，$\rho(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$。

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$。

(3) $\rho(ax+by,z)=a\rho(x,z)+b\rho(y,z)$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$。

则称 ρ 是 X 上的一个内积，称 X 为**内积空间**。通常将内积 $\rho(x,y)$ 记成 $\langle x,y\rangle$。

完备的内积空间称为 **Hilbert 空间**。

在内积空间上可以按照 $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$ 定义范数，容易验证它符合范数的三项要求。这个范数称为由内积导出的范数。因此一切内积空间都是线性赋范空间，反过来不成立。由内积导出的范数成立下面的等式：

$$\|x-y\|^2+\|x+y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2), \tag{1.1.2}$$

而一般的范数未必能满足。式(1.1.2)称为平行四边形公式，因为用几何语言说，式(1.1.2)就是“对角线的平方和等于四边的平方和”。反之，如果一个范数满足平行四边形公式，那么这个范数可以诱导出一个内积 $\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$。因此平行四边形公式完全刻画了内积空间范数的特征。

前面提及的空间 $\mathbb{R}^n$，$C([a,b],\mathbb{R}^n)$，$L_p([a,b],\mathbb{R}^n)$ 和 $AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ 中，只有 $(\mathbb{R}^n,\|x\|_2)$

⑦　内积的像集也可以是复数，但是本书主要考虑实数，因此只介绍实数时的情形。

和 $L_2([a,b],\mathbb{R}^n)$是内积空间，它们的内积分别是

$$\langle x,y\rangle = x^{\mathrm{T}}y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x,y \in \mathbb{R}^n,$$

$$\langle x(t),y(t)\rangle = \int_a^b x^{\mathrm{T}}(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} x_i(t)y_i(t)\mathrm{d}t, \quad x(t),y(t) \in L_2[a,b],\mathbb{R}^n)。$$

内积和由它导出的范数之间存在不等式

$$\langle x,y\rangle \leqslant \| x \| \| y \|。 \tag{1.1.3}$$

式(1.1.3)称为 **Schwarz 不等式**，它是内积空间的基本不等式。由式(1.1.3)，对于内积空间中的任意两个向量 x 和 y，可以定义它们之间的夹角 $\theta\in[0,\pi)$为

$$\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\| x \| \| y \|}。$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\langle x,y\rangle=0$，称 x 和 y 垂直或者正交，记成 $x\perp y$。

如果 $\| x \| =1$，那么$\langle x,y\rangle = \| y \| \cos\theta$，它正好是 y 在 x 所在的直线上、沿着 x 方向的投影。这个几何事实以后会经常应用。

定理 1.1.8(Reisz 内积表示定理) X 是 Hilbert 空间，如果 $f\in X^*$，则存在 $y\in X$，使得 $f(x)=\langle x,y\rangle$，并且 $\| f \| = \| y \|$。 □

定理 1.1.8 说明了一个重要的事实，在 Hilbert 空间，线性有界泛函只有内积。

设 $M\subset X$ 是一个子空间，那么所有与 M 垂直的向量组成一个子空间，这个子空间记成 $M^{\perp}$。不管 M 如何，$M^{\perp}$ 总是闭子空间，M 和 $M^{\perp}$ 构成 X 的一个正交分解，即 $M\cap M^{\perp}=\{0\}$，$M+M^{\perp}=X$。

设 M 是 X 的一个子空间，$y\notin M$，如果存在 $x_0\in M$，使得$(y-x_0)\perp M$，则称 x_0 为 y 在 M 上的**投影**。这时

$$\| y-x_0 \| = d(y,x_0) = d(y,M) = \inf_{x\in M} d(y,x) = \inf_{x\in M} \| y-x \|。$$

对于任意的一个子空间不能保证 x_0 的存在，但是当 X 是完备的而 M 是闭子空间的时候，x_0 必定存在。如果 x_0 存在，则它必然是唯一的。以后我们会将这些讨论推广到凸集上，讨论凸集上的投影。

练习

1. 证明：如果 $O_\alpha,\alpha\in I$ 是任意多个开集，那么 $\bigcup_\alpha O_\alpha$ 还是开集，举例说明 $\bigcap_\alpha O_\alpha$ 未必是开集。但是有限个开集的交依然是开集。
2. 证明：如果 $C_\alpha,\alpha\in I$ 是任意多个闭集，那么 $\bigcap_\alpha C_\alpha$ 还是闭集，举例说明 $\bigcup_\alpha C_\alpha$ 未必是闭集。但是有限个闭集的并依然是闭集。
3. 如果 A_1 和 A_2 是两个开集，那么它们的 Cartesian 积 $A_1\times A_2$ 是开集吗？它们的线性和 A_1+A_2 是开集吗？对闭集讨论类似的问题。

4. 如果 A_1 和 A_2 是两个紧集，证明它们的 Cartesian 积 $A_1 \times A_2$ 是紧集。它们的线性和 $A_1 + A_2$ 是紧集吗？

5. 用 bd A 表示 A 的边界，证明：

 (1) $x \in \text{bd } A$ 的充分必要条件是在任意的 $B(x,\varepsilon)$ 中既有 A 的点也有 A^c 的点。

 (2) $\text{bd } A = \text{cl}A \cap \text{cl}A^c$。

6. 证明：设 I 是 $\mathbb{R}$ 中的一个闭区间，$\{x_k(t)\}$ 是 $I \to \mathbb{R}^n$ 的一个绝对连续函数序列。如果对任意的 $t \in I$，$\{x_k(t)\}$ 是紧集，而且存在正函数 $c(t): I \to \mathbb{R}$，使得 $\| \dot{x}_k(t) \| \leqslant c(t)$；那么存在 $\{x_k(t)\}$ 的一个子列 $\{x_{k_n}(t)\}$ 满足：

 (1) 存在 I 上绝对连续函数 $x(t)$，使得 $x_{k_n}(t)$ 一致收敛到 $x(t)$；

 (2) 而且 $\{\dot{x}_{k_n}(t)\}$ 弱收敛到 $\dot{x}(t)$。

 (提示：应用 Alaoglu 定理和 Arzela-Ascoli 定理。)

7. 设 X 是 Hilbert 空间，M 是 X 的闭子空间，那么对任意的 $y \in X$，存在 y 的投影 $y_M \in M$（即 $(y - y_M) \perp y_M$），那么可以定义映射 $P_M: X \to M$，$P_M(y) = y_M$，证明 P_M 是线性映射，而且 $\| P_M \| = 1$。

8. 证明有限维空间中的子空间都是闭的。

9. 一个矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 可以看成是 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性映射。证明对于 A 的任意一种矩阵范数 $\| A \|$ 一定存在 $\mathbb{R}^n$ 的一种范数 $\| \cdot \|_\alpha$ 和 $\mathbb{R}^m$ 的一种范数 $\| \cdot \|_\beta$，使得 $\| A \|$ 和 $\| \cdot \|_\alpha$ 及 $\| \cdot \|_\beta$ 是相容的。

1.2 凸集

凸分析是微分包含理论的重要基础，凸集是凸分析的舞台。本节介绍凸集的一些基本性质，作为以后叙述和引用的基础。

1.2.1 凸集及其基本性质

在本节中，设 X 是一个线性赋范空间。如 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$，那么，$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$，$\lambda \in \mathbb{R}$，表示了经过 x_1 和 x_2 的一条直线①。x_1 和 x_2 将此直线分成三段，其中当 $\lambda \in [0,1]$ 时，沿着 λ 的增长方向，$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$ 表示了从 x_1 出发到达 x_2 的一段线段，以后就称它为连接 x_1 和 x_2 的线段，记为 $[x_1, x_2]$。类似地，可以推知 $(x_1, x_2]$，(x_1, x_2) 等记号的含义。需要注意的是：在多维的情形，记号 $[x_1, x_2]$ 只表示起点为 x_1 终点为 x_2 的线段，不蕴含 $x_1 < x_2$。当 $\lambda \in [1, \infty)$ 时，$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$ 表示了这条直线中从 x_2 出发，趋向无穷的射线部分，记成 $[x_2, \infty)$。类似地可以有 $(-\infty, x_1]$。对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$，用 $x_\lambda = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ 表示与这个 λ 对应的直线上的点。

定义 1.2.1 $A \subset X$，称 A 是 X 中的**凸集**，如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$，$[x_1, x_2] \subset A$。 □

X 中闭单位球 $\bar{B}$ 是凸集。因为如果 $x_1, x_2 \in \bar{B}$，则 $\| x_i \| \leqslant 1, i = 1, 2$。如 $x_\lambda = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, \lambda \in [0,1]$，则

$$\begin{aligned} \| x_\lambda \| &= \| (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \| \leqslant \| (1-\lambda)x_1 \| + \| \lambda x_2 \| \\ &\leqslant (1-\lambda) \| x_1 \| + \lambda \| x_2 \| \leqslant 1, \end{aligned}$$

$x_\lambda \in \bar{B}$。类似地，可以验证开的单位球 B 也是凸集。

下面罗列凸集的一些基本性质，其中 $A_i \subset X, i = 1, 2, \cdots$ 都是凸集，X 是线性赋范空间。

(1) $\varnothing$ 是凸集，只有一个元素的单元素集是凸集，X 也是凸集。

(2) X 的子空间是凸集。

(3) $\bigcap\limits_i A_i$ 是凸集。

(4) 对任意的 $x \in X$，$x + A_i$ 是凸集。

(5) 对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$，αA_i 是凸集。

(6) $A_1 \times A_2$ 是凸集。

(7) $A_1 + A_2$ 是凸集。

① 当 $x_1 = x_2$ 时，$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \equiv x_1$ 直线退化为一点。我们一般不考虑这种特殊情况。

注意：上述性质(6)和性质(7)只能扩展到有限个 A_i，因为当无穷的时候，$A_1\times A_2\times\cdots$未必是线性赋范空间；而对于性质(7)，是因为当 $a_i\in A_i$ 时，$a_1+a_2+\cdots$，未必收敛。

另外，对于两个凸集 A_1 和 A_2，$A_1\cup A_2$ 未必是凸集②。

定理 1.2.1　如果 A 是一个凸集，那么 int A 和 cl A 都是凸集。

证明：如果 int $A=\varnothing$，那么 int A 是凸集。证明如下。如果存在 $x_1,x_2\in$ int A，考虑线段 $[x_1,x_2]$，它的方程是 $x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$。记 $\Lambda=\{\lambda;\forall\sigma\in[0,\lambda],(1-\sigma)x_1+\sigma x_2\in\text{int }A\}$，则 $0\in\Lambda$，因而 $\Lambda\neq\varnothing$。记 $\lambda_0=\sup\Lambda$，则必然有 $\lambda_0=1$。否则，如果 $\lambda_0<1$，则因为 $x_{\lambda_0}=(1-\lambda_0)x_1+\lambda_0x_2\in\text{int }A$，所以存在 $\varepsilon>0$，使得 $B(x_{\lambda_0},\varepsilon)\subset A$，那么令 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},1-\lambda_0\right\}>0$，则 $\lambda_0+\delta\in\Lambda$。这和 $\lambda_0=\sup\Lambda$ 矛盾。

又如果 $x_1,x_2\in$ cl A，即存在两个序列 $\{x_n^1\}\subset A$ 和 $\{x_n^2\}\subset A$③，使得 $x_n^1\to x_1$ 和 $x_n^2\to x_2$。因此 $(1-\lambda)x_n^1+\lambda x_n^2\to(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$，$\forall\lambda\in[0,1]$。然而 $(1-\lambda)x_n^1+\lambda x_n^2\in A$，即 $(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\in$ cl A，或者 $[x_1,x_2]\subset$cl A。□

定理 1.2.2　如果 A 是一个凸集，$x_0\in$ int A 和 $x_1\in$ cl A，那么 $[x_0,x_1)\subset$int A。

证明：如果 $x_1\in$ int A，那么由定理 1.2.1，int A 是凸的，所以 $[x_0,x_1)\subset[x_0,x_1]\subset$int A。因此只要证明 $x_1\notin$ int A 的情形。由于 $x_0\in$ int A，因此存在 $\varepsilon>0$，使得 $B(x_0,\varepsilon)\subset A$。由于 $x_1\in$ cl $A\backslash$int A，在 x_1 的任意一个邻域里有 A 的点，因此对每个给定的 $x_\lambda=(1-\lambda)x_0+\lambda x_1\in[x_0,x_1)$，存在 $y\in B\left(x_1,\frac{1-\lambda}{\lambda}\varepsilon\right)\cap A$。这样，线段 $[x_0,y]\subset A$。

记 $y_\lambda=(1-\lambda)x_0+\lambda y\in[x_0,y]\subset A$，考察 $\|x_\lambda-y_\lambda\|=\lambda\|x_1-y\|<(1-\lambda)\varepsilon$。设 $z\in B(y_\lambda,(1-\lambda)\varepsilon)$，因为

$$(1-\lambda)\varepsilon>\|z-y_\lambda\|=\|z-(1-\lambda)x_0-\lambda y\|=(1-\lambda)\left\|\frac{z-\lambda y}{1-\lambda}-x_0\right\|,$$

就是 $\frac{z-\lambda y}{1-\lambda}\in B(x_0,\varepsilon)$，进一步 $z=(1-\lambda)\frac{z-\lambda y}{1-\lambda}+\lambda y\in A$，所以 $B(y_\lambda,(1-\lambda)\varepsilon)\subset A$(见图 1.1)。$x_\lambda\in B(y_\lambda,(1-\lambda)\varepsilon)$，因此 $x_\lambda\in$ int A。□

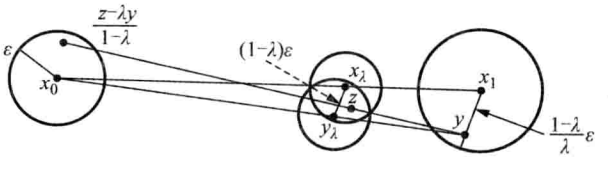


图 1.1　定理 1.2.2 的证明

定理 1.2.2 给出了凸集的一个重要特征，边界和内点的连线，除了属于边界的那个端点，都在凸集之内。应用与定理 1.2.2 相似的证明，还可以得到下面的结论，其证明留作练习。

② 读者注意区分 $A_1\cup A_2$ 和 A_1+A_2。

③ $\{x_n^1\}$和$\{x_n^2\}$可能是常值序列。

定理 1.2.3 如果 A 是一个凸集，$x_0 \in \operatorname{int} A$ 和 $x_1 \in \operatorname{cl} A$，那么经过 x_0 和 x_1 的直线 $x=(1-\lambda)x_0+\lambda x_1$，当 $\lambda>1$ 时，$x_\lambda \notin \operatorname{cl} A$，即 $(x_1,\infty)\cap \operatorname{cl} A=\varnothing$。 □

1.2.2 凸集的表示

这一小节讨论线性赋范空间中的凸集结构。

设 $x_1,x_2\in X$，$\{x;x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2,\lambda\in[0,1]\}$ 称为是 x_1 和 x_2 的凸组合，从上文知道两个点的凸组合是连接这两个点的线段 $[x_1,x_2]$。当 $x_1,x_2,x_3\in X$ 时，集合

$$\{x;x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in[0,1],\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1\}$$

称为 x_1,x_2 和 x_3 的凸组合，记成 $\operatorname{conx}(x_1,x_2,x_3)$。如果 x_1,x_2 和 x_3 不在一条直线上④，则 $\operatorname{conx}(x_1,x_2,x_3)$ 是以 x_1,x_2 和 x_3 为顶点的含边的闭三角形。凸组合的一般定义如下。

定义 1.2.2 设 $\{x_n,n=1,2,\cdots\}$ 为 X 的子集，从中任意选取有限集 $\{x_{n_i},i=1,2,\cdots,m\}$，则 $\left\{x;x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_ix_{n_i},\lambda_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1\right\}$ 称为这 m 个元素的凸组合，而集合

$$\operatorname{conx}(x_n,n=1,2,\cdots)=\left\{x,x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_ix_{n_i},m\in\mathbb{Z}(>0),\lambda_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,x_{n_i}\in\{x_n\}\right\}$$

称为 $x_n\in X,n=1,2,\cdots$ 的有限凸组合，简称**凸组合**，也称是顶点为 $x_n\in X$ 的**单纯形**。 □

定理 1.2.4 $\operatorname{conx}(x_n,n=1,2,\cdots)$ 是 X 中的凸集。

证明：设 $x,y\in\operatorname{conx}(x_n,n=1,2,\cdots)$，则

$$x=\sum_{i=1}^{m}\nu_ix_{n_i},\quad \nu_i\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{m}\nu_i=1,\quad y=\sum_{i=1}^{m}\mu_ix_{n_i},\quad \mu_i\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{m}\mu_i=1^{⑤},$$

那么，对任意的 $\lambda\in[0,1]$，

$$(1-\lambda)x+\lambda y=(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\nu_ix_{n_i}+\lambda\sum_{i=1}^{m}\mu_ix_{n_i}=\sum_{i=1}^{m}[(1-\lambda)\nu_i+\lambda\mu_i]x_{n_i}。$$

显然，$(1-\lambda)\nu_i+\lambda\mu_i\geqslant 0$，且

$$\sum_{i=1}^{m}[(1-\lambda)\nu_i+\lambda\mu_i]=(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\nu_i+\lambda\sum_{i=1}^{m}\mu_i=1,$$

即 $(1-\lambda)x+\lambda y\in\operatorname{conx}(x_n,n=1,2,\cdots)$。 □

定理 1.2.4 还说明，对于任意的 $x\in\operatorname{conx}(x_i,i=1,2,\cdots)$，必定存在 $x_{i_0}\in\{x_i,i=1,2,\cdots\}$，$y\in\operatorname{conx}\{\{x_i,i=1,2,\cdots\}\backslash\{x_{i_0}\}\}$，使得 $x=(1-\lambda)x_{i_0}+\lambda y,\lambda\in[0,1]$。

定义 1.2.3 $A\subset X$，A 的**凸包** $\operatorname{co}A$ 是包含 A 最小凸集。 □

由于集合的包含关系在其幂集上只是半序关系，这个“最小”是否确定？也即定义存在合理性问题。然而，可以证明 $\operatorname{co}A=\bigcap_{\Lambda\supset A,\Lambda\text{凸集}}\Lambda$，其右端是唯一确定的。由于 $\operatorname{conx}(x_i,x_i\in A)$ 是

④ 这个条件等价于 $x_3\notin\{x;x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2,\lambda\in\mathbb{R}\}$。

⑤ 总可以通过添加 0 项，使得 x 和 y 由相同的 x_{n_i} 构成的凸组合。

凸集，而且包含 A，因此 $\operatorname{co} A=\operatorname{conx}(x_i, x_i\in A)$。下面的 **Caratheodory 定理**揭示了有限维线性空间中 A 凸包的结构。

定理 1.2.5　设 $A\subset X$，X 是 n 维的线性空间，那么任给 $x\in\operatorname{co} A$，必然存在 m 个向量 $x_i\in A$，$i=1,2,\cdots,m$ 和 $\lambda_i>0$，$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$，使得 $x=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$。特别可以使得 $m\leqslant n+1$。

证明：从定理 1.2.4 的证明可知，$\operatorname{co} A$ 的元素可以写成 m 个向量 x_i 的凸组合形式。剩下只要证明，$m\leqslant n+1$。

我们设法证明，如果 $m>n+1$，那么一定存在另一个凸组合，它同样生成了 x，但是只用了 $m-1$ 个 x_i。

设 $x=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$，其中的 $\lambda_i>0$，$x_i\in X$，由于 X 是 n 维的线性空间，因此可以将 x_i 写成 $x_i=[x_i^{(1)}\ x_i^{(2)}\ \cdots\ x_i^{(n)}]^{\mathrm{T}}$，这样 m 个 $n+1$ 维向量 $[x_i^{(1)}\ x_i^{(2)}\ \cdots\ x_i^{(n)}\ \ 1]^{\mathrm{T}}$ 必定线性相关。这意味着存在 m 个不全为零的实数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，使得

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_m x_m=0,\quad \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=0。$$

在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中总可以找到一个 $\alpha_j>0$（否则上面两式同时乘以 -1），因此存在 $\beta=\min\left\{\dfrac{\lambda_i}{\alpha_i};\alpha_i>0,i=1,2,\cdots,m\right\}$，则 $\mu_i=\lambda_i-\beta\alpha_i\geqslant 0$ 对所有的 $i=1,2,\cdots,m$ 成立，并且 μ_i 中至少有一个是 0，还有

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i=\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i-\beta\alpha_i)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i-\beta\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1,$$

而

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i x_i=\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i-\beta\alpha_i)x_i=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i-\beta\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i=x。$$

在 $x=\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i x_i$ 中的至多只有 $m-1$ 个 $\mu_i>0$。这样我们完成了证明。　□

在定理 1.2.5 中，没有要求 $x_i,i=1,2,\cdots,m$ 是线性无关的。而且即使 $m\leqslant n$，也不能保证 $x_i,i=1,2,\cdots,m$ 是线性无关的。作为定理 1.2.3 的应用，我们有下面的有用结论。

推论 1.2.1　如果 X 是有限维线性空间，A 是其中的紧集，那么 $\operatorname{co} A$ 也是紧集。　□

推论 1.2.1 可以利用定理 1.2.5 给出的表达式和有限维线性空间中的紧集是有界闭集这个特征获证。从略。

在讨论拓扑性质的时候，开集、内点、边界等都是非常有用的概念，然而当一个凸集只在一个子空间中时，它的内点可以是空集，所有的点都是边界，就无法区分它们的拓扑性质，这给分类研究带来了困难。例如在 3 维空间 $O-xyz$ 中，$O-xy$ 平面上的单位圆是凸集，但是它只在 $O-xy$ 平面上，在 3 维空间中没有内点。为了研究低维子空间上的凸集，下面引进相对内点的概念。

定义 1.2.4　$A\subset X$ 为一个集合，如果存在 $x\in X$，使得 $x+A$ 包含在 X 的一个子空间 H 中，则 H 就称为 A 中**承载子空间**，记成 $H=\operatorname{car} A$，x 称为支撑向量。　□

如果 $x+A\subset H$，那么对任意的 $a,y\in A$，$x+a\in H$，$x+y\in H$。于是 $a-y\in H$，就是 $-y+A\subset H$。这说明只要 $A\neq\emptyset$，那么对任意 $y\in A$，$-y$ 都是支撑向量，也说明承载子空间与支撑向量的选择无关，或者说尽管支撑向量不是唯一的，但是承载子空间是确定的。

为了证明下面的结论，我们需要一个引理。其证明略去。

引理 1.2.1 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 维线性赋范空间 X 的一组基，则$\{x;x=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,a_i\in(-\varepsilon,\varepsilon)\}$是 X 的原点处的一个开集。 □

如果 x_i 是第 i 个分量为 1 其余都是 0 的单位向量，那么引理 1.2.1 给出的开集就是 $\{x;$其所有分量都$<\varepsilon\}$，如果采用无穷大范数，它就是 εB。

定理 1.2.6 $A\subset X$ 为一个凸集，X 是 n 维线性赋范空间。如果 $\operatorname{int}A=\emptyset$，那么必定存在 $m<n$，使得 $H=\operatorname{car}A$ 和 $m=\dim H$。

证明：如果 $A=\emptyset$，那么任意一个子空间都可以是 A 的承载子空间。所以不妨设 $A\neq\emptyset$。取定 $x_0\in A$，在 A 中找出最多的 $x_i,i=1,2,\cdots,r$，使得 x_i-x_0 线性无关。我们证明如果 $r=n$，那么 $\operatorname{int}A\neq\emptyset$。

考虑 $\operatorname{conx}(x_0,x_1,\cdots x_n)$，$A$ 是凸的，所以 $\operatorname{conx}(x_0,x_1,\cdots x_n)\subset A$。因为 $x_i-x_0,i=1,2,\cdots,n$ 是 X 的一组基。考虑下面的组合

$$\lambda_1(x_1-x_0)+\lambda_2(x_2-x_0)+\cdots+\lambda_n(x_n-x_0)。\tag{1.2.1}$$

首先，取 $\bar{x}=\dfrac{x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n}{n+1}$，则 $\bar{x}\in A$，进一步

$$\bar{x}-x_0=\frac{1}{n+1}(x_1-x_0)+\frac{1}{n+1}(x_2-x_0)+\cdots+\frac{1}{n+1}(x_n-x_0),$$

即 $\bar{x}-x_0$ 具有式(1.2.1)的形式。当 $\lambda_i\in\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{(n+1)^2},\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$时，由引理1.2.1可知，式(1.2.1)构成一个以 $\bar{x}-x_0$ 为中心的开集 O，即对任意 $x\in x_0+O$，

$$x-x_0=\lambda_1(x_1-x_0)+\lambda_2(x_2-x_0)+\cdots+\lambda_n(x_n-x_0),\tag{1.2.2}$$

其中 $\lambda_i\in\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{(n+1)^2},\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$。式(1.2.2)就是

$$x=(1-\lambda_1-\cdots-\lambda_n)x_0+\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n。$$

此时，$(1-\lambda_1-\cdots-\lambda_n)\geqslant\dfrac{1}{(n+1)^2}$，即 $x\in A$，$x_0+O\subset A$。这与条件矛盾。这样 $r<n$。$A-x_0$ 包含在 X 的一个真子空间中。 □

现在可以定义相对内点和相对边界。

定义 1.2.5 如果 $\dim(\operatorname{car}A)<n$，$x\in A$ 称为是 A 的**相对内点**，如果存在 $\varepsilon>0$，使得 $x+(\varepsilon B\cap\operatorname{car}A)\subset A$，相对内点的全体称为 A 的相对内部，记成 $\operatorname{reint}A$；$\operatorname{cl}A\backslash\operatorname{reint}A$ 是 A 的**相对边界**，记成 $\operatorname{re\,bd}A$。 □

有了定义 1.2.5，定理 1.2.2 和定理 1.2.3 可以推广到相对内部上。例如，定理 1.2.2 可以推广成：如果 A 是一个凸集，$x_0\in\operatorname{reint}A$ 和 $x_1\in\operatorname{cl}A$，那么$[x_0,x_1)\subset\operatorname{reint}A$。

1.2.3　分离定理

凸分析在最优化理论中有重要应用，这里只做简单介绍。先推广有关投影的结论，这个结论常被称为变分原理。然后证明凸集分离定理。本小节总假设 X 是内积空间。

设 $A\subset X, x\in X$，根据定义 x 到 A 的距离为 $d(x,A)=\inf\limits_{a\in A}\|x-a\|$，定义一个关系

$$\pi(x,A)=\{y;y\in A,\|x-y\|=d(x,A)\},$$

这个关系称为 x 在 A 上的**投影**。之所以称它为关系，是因为如果 A 不是闭集的话，有时，$\pi(x,A)$ 可能是空集，而在另一些时候，$\pi(x,A)$ 又可能是一个多元的集合。但是当 A 是闭凸集的时候，情形就不同了。

定理 1.2.7　A 是内积空间 X 中的闭凸集，则对任意的 $x\in X$，$\pi(x,A)$ 有并且只有一个元素。

证明：由于 A 是闭集，因此 $\pi(x,A)\neq\varnothing$。现在证明 $\pi(x,A)$ 只有一个元素的，如果存在 $a,b\in A, a\neq b$，使得 $\|x-a\|=\|x-b\|=d(x,A)$。考虑平行四边形公式：

$$2(\|x-a\|^2+\|x-b\|^2)=\|a-b\|^2+\|2x-a-b\|^2,$$

由于 $a\neq b$，因此上式蕴含 $d(x,A)^2=\|x-a\|^2>\left\|x-\dfrac{a+b}{2}\right\|^2$，而 A 是凸集，则 $\dfrac{a+b}{2}\in A$。这与 $\|x-a\|=d(x,A)$ 矛盾。所以 $\pi(x,A)$ 只含有唯一向量。　□

与子空间的情形不同，通常不能断定 $(x-\pi(x,A))\perp A$。一个稍弱的结论将在下面给出。

上一节提到过：如果 x_0 的范数是 1（以后称为单位长度向量），那么 $\langle x,x_0\rangle$ 是 x 在 x_0 方向上的投影。设 A_1 和 A_2 是两个不相交的凸集，如有一个 $n-1$ 维的平面 $n^{\mathrm{T}}x=c$（通常 n 称为这个平面的法向量）将这两个凸集分在两边（见图 1.2），则对任意 $x_1\in A_1$，$\langle n,x_1\rangle\leqslant c$，而对任意 $x_2\in A_2$，$\langle n,x_2\rangle\geqslant c$，所以要寻找一个 $n-1$ 维的平面将两个凸集 A_1 和 A_2 分离就是要寻找一个向量 n，使得 $\langle n,x_2\rangle\geqslant\langle n,x_1\rangle$ 对一切 $x_1\in A_1$ 和 $x_2\in A_2$ 成立。所谓凸集分离就是探讨 n 的存在问题。

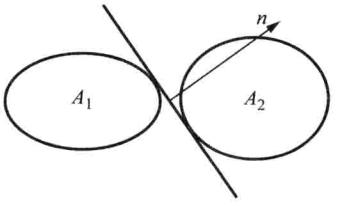


图 1.2　凸集的分离

引理 1.2.2　设 $A\subset X$ 是一个凸集，$x_0\notin A$。那么必定存在 $n\in X$，使得 $\langle n,x_0\rangle\geqslant\langle n,x_A\rangle$ 对一切 $x_A\in A$ 成立。

引理 1.2.2 等价于说，如果 $x_0\notin A$，那么必定有一个 $n-1$ 维的平面，将 x_0 和 A 分离。如果等号成立则表示这个平面与 A 相切，同时 x_0 在此平面上。

证明:我们分两种情形讨论。

(1) $x_0 \notin \mathrm{cl}\, A$。记 $y=\pi(x_0, \mathrm{cl}\, A)$,根据定理 1.2.6,$y$ 是唯一确定的。于是对于任意的 $x_A \in \mathrm{cl}\, A$,有 $\| x_A - x_0 \| \geqslant \| y - x_0 \|$。由于 $\mathrm{cl}\, A$ 是凸集,所以

$$\begin{aligned} \| y - x_0 \|^2 &\leqslant \| \lambda x_A + (1-\lambda) y - x_0 \|^2 \\ &= \lambda^2 \| x_A - y \|^2 + 2\lambda \langle x_A - y, y - x_0 \rangle + \| y - x_0 \|^2 。 \end{aligned}$$

因此 $\lambda^2 \| x_A - y \|^2 + 2\lambda \langle x_A - y, y - x_0 \rangle \geqslant 0$。又因为 $\lambda = 0$ 相当于 $x_A = y$,所以不等式

$$2\langle x_A - y, y - x_0 \rangle + \lambda \| x_A - y \|^2 \geqslant 0$$

总成立。进一步,我们断定

$$\langle x_A - y, y - x_0 \rangle \geqslant 0。 \tag{1.2.3}$$

因为,倘若式(1.2.3)不成立,由于 $\langle x_A - y, y - x_0 \rangle$ 和 $\| x_A - y \|^2$ 都不依赖于 λ,所以必存在充分小的 $\lambda > 0$,使得 $\langle x_A - y, y - x_0 \rangle + \lambda \| x_A - y \|^2 < 0$。

令 $n = x_0 - y$,那么 $n \neq 0$,且由式(1.2.3)得 $\langle x_A - y, n \rangle \leqslant 0$,或者

$$\langle x_A, n \rangle \leqslant \langle y, n \rangle = \langle x_0 - n, n \rangle = \langle x_0, n \rangle - \| n \|^2 。 \tag{1.2.4}$$

显然,式(1.2.4)蕴含 $\langle n, x_0 \rangle > \langle n, x_A \rangle$。

(2) $x_0 \in \mathrm{cl}\, A \backslash A$。$x_0$ 是 A 的边界点。也就是存在序列 $\{x_k\} \subset A^c$,$x_k \to x_0$。对这个 x_k 应用式(1.2.4),存在 n_k,使得

$$\langle x_A, n_k \rangle \leqslant \langle x_0, n_k \rangle - \| n_k \|^2 。$$

记 $\hat{n}_k = \dfrac{n_k}{\| n_k \|}$,则 $\| \hat{n}_k \| = 1$,且上式成为

$$\langle x_A, \hat{n}_k \rangle \leqslant \langle x_0, \hat{n}_k \rangle - \| n_k \| 。$$

因为有限维空间的单位球壳是紧的,所以 $\{\hat{n}_k\}$ 存在收敛子列。$\hat{n}_{k_j} \to n_0$,于是对这个 n_0 成立 $\langle n_0, x_0 \rangle \geqslant \langle n_0, x_A \rangle$。 □

就上述定理的证明,我们给出如下注记。

注 1 式(1.2.3)就是 $\langle x_A - \pi(x_0, A), x_0 - \pi(x_0, A) \rangle \leqslant 0$。在 1.1 节中,我们指出当 A 是子空间时对任意的 $x_A \in A$,成立 $\langle x_A - \pi(x_0, A), x_0 - \pi(x_0, A) \rangle = 0$。因此式(1.2.3)可以看成是子空间投影正交性的一种推广。 □

注 2 $A \subset X$ 是一个闭凸集,$x_0 \notin A$,如 $y \in A$ 使得 $\langle x_A - y, x_0 - y \rangle \leqslant 0$ 对一切 $x_A \in A$ 成立,那么 $y = \pi(x_0, A)$。 □

注 3 式(1.2.4)是当 $x_0 \notin \mathrm{cl}\, A$ 时的一个更强的结论,这个结论也可以写成存在 $n \in \mathbb{R}^n$,$\beta \in \mathbb{R}$,使得 $\langle x_0, n \rangle > \beta > \langle x_A, n \rangle$,即存在一个 $n-1$ 维平面,它将 x_0 和 A 分离,而且 x_0 不在这个平面上。这个结论以后会经常用到。 □

注 4 在证明 $x_0 \in \mathrm{cl}\, A \backslash A$ 的情形时,由于 n_0 是 $\{\hat{n}_k\}$ 子序列的极限,因此当 $\{\hat{n}_k\}$ 不收敛时,可以满足 $\langle n_0, x_0 \rangle \geqslant \langle n_0, x_A \rangle$ 的 n_0 不一定是唯一的。 □

定理 1.2.8 如果 A_1 和 A_2 是内积空间 X 中的两个凸集,$A_1 \cap A_2 = \varnothing$,则存在 $n \in X$,使得 $\langle x_1, n \rangle \leqslant \langle x_2, n \rangle$ 对任意的 $x_1 \in A_1$,$x_2 \in A_2$ 成立。

证明：设 $A=A_1-A_2$，那么 A 是凸集。而且 $0\notin A$。根据引理 1.2.2，存在 $n\in X$，使得 $\langle x_A,n\rangle\leqslant\langle 0,n\rangle=0$。因为 A 中的元素都是 x_1-x_2 的形式，因此 $\langle x_1-x_2,n\rangle\leqslant 0$，就是 $\langle x_1,n\rangle\leqslant\langle x_2,n\rangle$。 □

练习

1. 如果 $x\in A,\alpha x\in A$，对一切 $\alpha\in\mathbb{R}\ (\geqslant 0)$ 成立，则称 A 为锥。证明 A 一个是凸锥的充分必要条件是对任意的 $x,y\in A,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ (\geqslant 0)$，$\alpha x+\beta y\in A$。
2. 设 $A_i,i=1,2,\cdots$ 是同一个线性赋范空间 X 的凸集，那么定义 $X^\infty=X\times X\times\cdots$ 为集合 $\{x=[x_1,x_2,\cdots],x_i\in X\}$，而其中 x_i 中只有有限个非零。那么
 (1) X^∞ 是线性赋范空间。
 (2) $A_1\times A_2\times\cdots$ 是 X^∞ 中的凸集。
3. 证明如果 $A\subset X$ 为一个紧集，那么 clco A 也是紧集。
4. 证明定理 1.2.3。
5. 证明推论 1.2.1。
6. 证明如果 A_1 和 A_2 都是凸集，$A_1\cap A_2=\varnothing$，那么 A_1-A_2 是凸集。举例说明 $A_1\cap A_2=\varnothing$ 的条件是必要的。
7. $A\subset X$ 为一个凸集，证明 A 上的投影函数 $\pi(x,A)$ 满足下列性质：
 (1) $\forall x\in A,\pi(x,A)=x$。
 (2) $\pi(x,A)$ 满足 Lipschitz 条件，而且 Lipschitz 常数是 1。
 (3) $\pi(x,A)$ 是单调的，即 $\langle\pi(x,A)-\pi(y,A),x-y\rangle\geqslant 0$。
8. 如果 A 是一个凸锥，那么 A 上的投影函数 $\pi(x,A)$ 满足下列性质：
 (1) 对任意的 $x\in X,y\in A,\langle x-\pi(x,A),y\rangle\leqslant 0$。
 (2) 对任意的 $x\in X,\langle x-\pi(x,A),\pi(x,A)\rangle=0$。
 (3) 对任意的 $x\in X,\|x\|^2=\|\pi(x,\mathrm{cl}\ A)\|^2+\|x-\pi(x,\mathrm{cl}\ A)\|^2$。
 这三条说明凸锥具有更接近子空间的特征。
9. 设 A 是一个凸的紧集，而 B 是一个凸的闭集，$A\cap B=\varnothing$，那么存在 $n\in X,\varepsilon>0$，使得 $\langle x_A,n\rangle\leqslant\langle x_B,n\rangle-\varepsilon$ 对一切 $x_A\in A,x_B\in B$ 成立。

1.3 凸函数

凸函数是凸分析中另一个基本概念。本节将对凸函数做个简单介绍，包括凸函数的定义，介绍以后要用到的几个凸函数，并探讨凸函数的连续和微分。

1.3.1 凸函数及其基本性质

本节总将$\mathbb{R}^n$看成是内积空间，$f:\mathbb{R}^n\to\mathfrak{R}$是一个函数，集合$A\subset\mathbb{R}^n$。

定义 1.3.1 $f:A\to\mathfrak{R}$称为A上的一个**凸函数**，如果A是一个凸集，而且对于任意的$x_1,x_2\in A,\lambda\in[0,1]$，成立

$$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\leqslant(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)。\tag{1.3.1}$$

f称为**严格凸函数**，如果式(1.3.1)中的“$\leqslant$”能改成“$<$”。 □

注 因为$\{x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2,\lambda\in[0,1]\}$就是线段$[x_1,x_2]$，因此由定义式(1.3.1)立即可以得到：$f$是$A$上的凸函数的充分必要条件是它在任意一段线段$[x_1,x_2]\subset A$上是凸函数。 □

凹函数是采用凸函数定义的。如果$-f$是凸函数，那么称f是凹函数。注意当考察凹函数的时候，我们仍然希望它的定义域是一个凸集。本书基本不考虑凹函数，读者可以自行判别凸函数的哪些性质可以移植到凹函数上去。

容易将式(1.3.1)式推广：如果f是A上的凸函数，$x_i\in A,\lambda_i\in[0,1]$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，则

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)。\tag{1.3.2}$$

式(1.3.2)通常称为凸函数的**Jensen不等式**。

我们不加证明地引进凸函数的下列性质，其中的f,f_i等都是定义在同一个凸集A上的凸函数。

(1) $g=f_1+f_2$是凸函数；对任意的$a>0,g=af_1$也是凸函数。

(2) 如果$M\in\mathbb{R}^{m\times n}$为一个矩阵，$b\in\mathbb{R}^m$是一个向量，那么$f(Mx+b)$是凸函数。

(3) 如果$g:\mathbb{R}\to\mathfrak{R}$是单调增的凸函数，那么$g(f(x))$是凸函数，其中规定$g(\infty)=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)$，$g(-\infty)=\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)$。

(4) $g(x)=\sup\limits_{i}f_i(x)$是凸函数。

(5) $g(x)=\lim\limits_{i\to\infty}\sup f_i(x)$是凸函数，其中$\lim\limits_{i\to\infty}\sup f_i(x)=\lim\limits_{i\to\infty}\sup\limits_{k>i}(f_k(x))$。

最后两条性质可以推广到无穷多个f_i。

作为练习，读者不妨讨论f和f_i都是严格凸函数时的性质。

定义 1.3.2　$f:A\to\mathfrak{R}$ 是一个函数，集合 epi $f=\{(x,\alpha);x\in A,f(x)\leqslant\alpha\}$ 称为 f 的**上行图**。 □

定理 1.3.1　$f:A\to\mathfrak{R}$ 是一个凸函数的充分必要条件是它的上行图 epi f 是 $\mathbb{R}^n\times\mathfrak{R}$ 中的凸集。

证明：设 $(x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2)\in$ epi f，根据上行图的定义，有 $f(x_i)\leqslant\alpha_i,i=1,2$。

将 epi f 中的点写成向量形式 $\begin{bmatrix}x\\ \alpha\end{bmatrix}$，根据定义 $\begin{bmatrix}x\\ f(x)\end{bmatrix}\in$ epi f。如果 epi f 是凸集，那么 $(1-\lambda)\begin{bmatrix}x_1\\ f(x_1)\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}x_2\\ f(x_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\\ (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)\end{bmatrix}\in$epi f。由于 A 是凸集，因此，$(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\in A$。另外，由上行图定义 $f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\leqslant(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$。充分性获证。

另一方面，对任意的 $\begin{bmatrix}x_i\\ \alpha_i\end{bmatrix}\in$ epi $f,i=1,2$。由于 A 是凸集，当 $x_1,x_2\in A$ 时，$(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\in A$；又由于 f 是凸函数，$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\leqslant(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$，即 $\begin{bmatrix}(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\\ (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)\end{bmatrix}\in$ epi f。进一步，对任意的 $f(x_i)\leqslant\alpha_i,i=1,2,(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)\leqslant(1-\lambda)\alpha_1+\lambda\alpha_2$，由上行图定义，

$$(1-\lambda)\begin{bmatrix}x_1\\ \alpha_1\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}x_2\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\\ (1-\lambda)\alpha_1+\lambda\alpha_2\end{bmatrix}\in\text{ epi }f,$$

即 epi f 是凸集。必要性也获证。 □

定理 1.3.1 给出了凸函数和凸集之间的关系。

定义

$$\text{lev}(f\leqslant\alpha)=\{x\in A;f(x)\leqslant\alpha\}$$

为 f 的不大于 α 的**层集**。类似地可以定义 lev$(f<\alpha)$，可以证明对于凸函数而言，这些集合都是凸的。在下一节和第 4 章将用到层集的概念。

这一小节最后讨论凸函数的 Lipschitz 性质。

引理 1.3.1　设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathfrak{R}$ 是一个凸函数，且在 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 的邻域 $B(x_0,\varepsilon)$ 内上有界，那么存在 $\delta>0$，f 在 $B(x_0,\delta)$ 上满足 Lipschitz 条件。

证明：由引理条件，存在 $M>0$，使得对任意 $x\in B(x_0,\varepsilon)$，$f(x)\leqslant M$。现在证明 f 在邻域 $B(x_0,\varepsilon)$ 内也是下有界的。任取 $z\in B(x_0,\varepsilon)$，那么存在 $z'\in B(x_0,\varepsilon)$，使得 $x_0=\dfrac{z+z'}{2}$。由于 f 是凸函数，因此 $f(x_0)\leqslant\dfrac{1}{2}f(z)+\dfrac{1}{2}f(z')$，就是 $f(z)\geqslant 2f(x_0)-M$。记 $c=\max\{|2f(x_0)-M|,M\}$，对任意的 $z\in B(x_0,\varepsilon)$，$|f(z)|\leqslant c$。取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，那么当 $x_1,x_2\in B(x_0,\delta)$ 时，记 $\Delta=\|x_1-x_2\|$，

并定义 $x_3=x_2+\frac{\delta}{\Delta}(x_2-x_1)$，则 $x_3\in B(x_0,\varepsilon)$，并且 $x_2=\frac{\delta}{\Delta+\delta}x_1+\frac{\Delta}{\Delta+\delta}x_3$。由于 f 是凸函数，因此

$$f(x_2)\leqslant\frac{\delta}{\Delta+\delta}f(x_1)+\frac{\Delta}{\Delta+\delta}f(x_3),$$

两边减去 $f(x_1)$得：

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&\leqslant\frac{\Delta}{\Delta+\delta}(f(x_3)-f(x_1))\\&\leqslant\frac{\Delta}{3\delta}\mid f(x_3)-f(x_1)\mid\leqslant\frac{2c}{3\delta}\parallel x_1-x_2\parallel。\end{aligned}$$

如果令 $x_4=x_1+\frac{\delta}{\Delta}(x_1-x_2)$，重复上述过程，可以得到 $f(x_1)-f(x_2)\leqslant\frac{2c}{3\delta}\parallel x_1-x_2\parallel$。这样

$$\mid f(x_1)-f(x_2)\mid\leqslant\frac{2c}{3\delta}\parallel x_1-x_2\parallel。$$ □

定理 1.3.2 如果凸函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 处处有界，则 f 在$\mathbb{R}^n$上是局部 Lipschitz 的。

证明：对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$，肯定存在一个凸多面体 $\Sigma=\mathrm{co}(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$，使得 $x\in\mathrm{int}\ \Sigma$。$x=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i$，$\lambda_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1$，于是 $f(x)\leqslant\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(x_i)\leqslant\max_i\mid f(x_i)\mid$。$f$ 局部上有界，应用引理 1.3.1，结论获证。 □

注 从引理 1.3.1 和定理 1.3.2 的证明过程可以得到凸函数的下列两个性质：

(1) 如果一个凸函数在 x_0 的一个邻域上是上有界的，那么在这个邻域也是下有界的，从而进一步它在这个邻域里是有界的。

(2) 如果一个凸函数在 x_0 的一个邻域上是上有界的，那么它在 x_0 连续。进一步，有界凸函数必是连续函数。 □

1.3.2 凸函数的例子

这一小节考虑一些以后要用到的凸函数。

在线性赋范空间 X 中，范数是 X 到$\mathbb{R}$ ($\geqslant 0$)的映射，由于

$$\parallel(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\parallel\leqslant(1-\lambda)\parallel x_1\parallel+\lambda\parallel x_2\parallel,$$

因此范数是定义在整个空间 X 上的凸函数。

如果 $V\in\mathbb{R}^{n\times n}$是一个正定矩阵，那么可以定义$\mathbb{R}^n$上的范数 $\parallel x\parallel=\sqrt{x^{\mathrm{T}}Vx}$。因此$\sqrt{x^{\mathrm{T}}Vx}$是凸函数，当 $x\geqslant 0$ 时，x^2 是单调递增的，因此正定二次型 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Vx$ 是凸函数。这个事实在下面的微分判据中可以看得更清楚。

设 $A\subset\mathbb{R}^n$是一个集合，定义函数 $S(x,A):\mathbb{R}^n\to\mathfrak{R}$ 如下，

$$S(x,A)=\sup_{x_a\in A}\langle x_a,x\rangle。$$

容易证明 $S(x,A)$是一个凸函数，并且是齐次的①。$S(x,A)$称为集合 A 的**支撑函数**。图 1.3 给出支撑函数的几何解释：$S(x,A)$是 cl A 中的点在向量 x 上投影的最大值。或者说，给定一个 n 维向量 x，当 $y\in\mathbb{R}^n$是可变的，那么$\langle x,y\rangle=S(x,A)$是一个 $n-1$ 维超平面，x 是这个超平面的法向量，这个超平面与 cl A 相切。当 A 是凸集时存在唯一的 $y\in$ cl A，使得$\langle x,y\rangle=S(x,A)$。

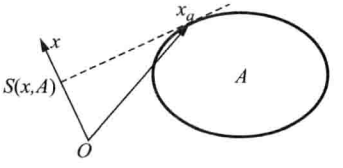


图 1.3　支撑函数示意图

A 取不同的集合，支撑函数 $S(x,A)$可以表述不同的意义。如果 $A=\{y_0\}$，$y_0\in\mathbb{R}^n$，则 $S(x,A)=\langle x,y_0\rangle$是$\mathbb{R}^n$中的线性有界泛函，特别将 y_0 取成是单位向量，则 $S(x,A)$是向量 x 在 y_0 方向上的投影。又如 A 是$\mathbb{R}^n$中的闭单位球，则 $S(x,A)=\|x\|$，即 x 的 2-范数。支撑函数在以后的讨论中会有很多应用，更多的关于支撑函数的讨论参阅本章的练习。

设 $A\subset\mathbb{R}^n$是一个凸集，且 $0\in$ int A，定义函数 $\mu(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 如下，

$$\mu(x)=\mu(x,A)=\inf\{a>0;a^{-1}x\in A\}。$$

$\mu(x)$称为 **Minkowski 函数**。由于 $0\in$ int A，因此对任意的 x，$\infty>\mu(x)\geqslant 1$，还可以证明 $\mu(x)$是正齐次的。为了证明 $\mu(x)$是凸函数，我们只要证明 $\mu(x+y)\leqslant\mu(x)+\mu(y)$。

设 $a=\mu(x)$，$b=\mu(y)$，记 $c=a+b+\varepsilon$。因 $a+\frac{\varepsilon}{2}>\mu(x)$，故$\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1}x\in A$，同理$\left(b+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1}y\in A$。现在考虑 $c^{-1}(x+y)=\frac{a+\frac{\varepsilon}{2}}{c}\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1}x+\frac{b+\frac{\varepsilon}{2}}{c}\left(b+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1}y\in A$。因此 $\mu(x+y)\leqslant c=a+b+\varepsilon=\mu(x)+\mu(y)+\varepsilon$。由于 ε 是任意的，所以 $\mu(x+y)\leqslant\mu(x)+\mu(y)$。

应用这个不等式和正齐次性，即可证明 $\mu(x)$是凸函数。

1.3.3　凸函数的微分

已知有界凸函数是连续的，这一小节的主要任务是进一步建立它的微分性质。先给出可微函数的凸性判据，然后对凸函数定义微分。

如果 f 是$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的一元可微函数，那么 f 的凸性可以方便地用它的导数判定，例如它的一阶导数是增的，或者它的二阶导数 $f''(x)>0$。我们在这一小节先将这些判据推广到$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的多元函数上，然后再对凸函数定义另一类的导数，探究它与凸函数极值的关系。

定理 1.3.3　设 $f:A\to\mathbb{R}$ 存在二阶导数，$A\subset\mathbb{R}^n$是凸集，那么下列的叙述等价。

① 一个函数 f 称为是齐次的，如果 $f(ax)=af(x)$，这蕴含着 $f(a^nx)=a^nf(x)$。如果只对正的 a 成立 $f(ax)=af(x)$，则称 f 是正齐次的。

(1) f 是 A 上的凸函数。

(2) 对任意的 $x_1, x_2 \in A$ 成立 $\langle x_2 - x_1, \nabla f(x_2) - \nabla f(x_1)\rangle \geqslant 0$，其中 ∇f 为 f 的梯度向量，$\nabla f^{\mathrm{T}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial f}{\partial x^2}\cdots\frac{\partial f}{\partial x^n}\right]$②，$x^i$ 是 x 的第 i 个分量。

(3) $f(x_2) \geqslant f(x_1) + \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1\rangle$ 任意的 $x_1, x_2 \in A$ 成立。

(4) $\nabla^2 f(x) \geqslant 0$③，对任意的 $x \in A$ 成立，其中 $\nabla^2 f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right]$ 是 f 的 **Hessian 矩阵**。

证明：我们不加证明地引入下列事实，这些事实在微积分理论中是基本的。考虑一维函数 $f: A \to \mathbb{R}$，$A \subset \mathbb{R}$ 为凸集。f 至少二阶连续可微，那么下列叙述等价。

ⅰ. f 是 A 上的凸函数；

ⅱ. $f'(x)$，$x \in A$ 是单调递增的；

ⅲ. $f(x_2) \geqslant f(x_1) + f'(x_2)(x_2 - x_1)$ 对一切 $x_1, x_2 \in A$ 成立；

ⅳ. $f''(x) \geqslant 0$，对一切 $x \in A$。

现在证明定理。根据定义 1.3.1 后面的注记，我们只要证明在 A 中的任意线段 $[x_1, x_2]$ 上函数是凸的。将 λ 视为变量，考虑单变量函数 $\bar{f}(\lambda) = f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1))$。根据凸函数的性质 2 和上面的结论 ⅱ，$\bar{f}(\lambda)$ 在 $\lambda \in [0,1]$ 上为凸函数的充分必要条件是 $\frac{\mathrm{d}\bar{f}}{\mathrm{d}\lambda}$ 是单调递增的。根据复合函数求导的法则④，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\bar{f}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} &= \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\bigg|_{x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}(x_1 + \lambda(x_2 - x_1))}{\mathrm{d}\lambda} \\ &= \nabla f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) \cdot (x_2 - x_1)。\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

如 $\frac{\mathrm{d}\bar{f}}{\mathrm{d}\lambda}$ 是单调递增的，则 $\frac{\mathrm{d}\bar{f}}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=1} = \nabla f(x_2)\cdot(x_2 - x_1) \geqslant \nabla f(x_1)\cdot(x_2 - x_1) = \frac{\mathrm{d}\bar{f}}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=0}$，即定理中的条件(2)。反之，如果条件(2)对任意两个 $x_1, x_2 \in A$ 成立，只要将 $x_\lambda = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$ 当作 x_2 就可以得到 $\frac{\mathrm{d}\bar{f}}{\mathrm{d}\lambda}$ 是单调递增的。因此条件(2)的等价性获证。

根据上述结论 ⅱ 和结论 ⅲ 的等价性，$\frac{\mathrm{d}\bar{f}}{\mathrm{d}\lambda}$ 是单调递增等价于 $f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1))|_{\lambda=1} \geqslant f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1))|_{\lambda=0} + \frac{\mathrm{d}\bar{f}}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=0}$，将式(1.3.3)代入即得。

根据上述结论 ⅰ 和结论 ⅳ 的等价性，只要将式(1.3.3)对 λ 继续求导，结论即得。 □

二次型 $x^{\mathrm{T}}Vx$ 的 Hessian 矩阵就是 $2V$，因此当 V 是正定矩阵时，二次型 $x^{\mathrm{T}}Vx$ 是凸函数。

定义 1.3.3 设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(\infty)$，$\upsilon \in \mathbb{R}^n$，$\lambda \in \mathbb{R}$，如果单侧极限

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda\upsilon) - f(x_0)}{\lambda}$$

② 一般将一个函数的梯度取成行向量，本书为了统一起见，定义 ∇f 为列向量。

③ 称一个矩阵 >0，意为它是正定的，说它 $\geqslant 0$ 是指它是非负定的。

④ 在(1.3.3)中，$a \cdot b = \langle a, b\rangle$。引入点积记号是为了用与单变量的记法比较相似。

存在(可以是有限数，也可以是$\pm\infty$，则称它是 f 在点 x_0 处沿着向量 v 的**方向导数**。记成 $Df(x_0)(v)$，其中 $\lambda \downarrow 0$ 表示 λ 单调递减到 0。 □

记号 $Df(x_0)(v)$可以这样理解：$Df(x_0):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(\infty)$是一个与 $x_0 \in \mathbb{R}^n$有关的算子，它将向量 $v \in \mathbb{R}^n$映射成一个实数。微积分中也有方向导数的定义，与那里的定义稍有不同的是，这里的极限是单侧的，规定 λ 是单调递减地趋向 0，其次在凸分析中允许函数值为无穷大。

回忆微积分中的结论，如果 f 在 x_0 处连续可微，那么 $Df(x_0)(v)=\langle \nabla f(x_0), v\rangle$。在没有连续可微的前提下，对于凸函数可以有这样的结论。

定理 1.3.4　设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(\infty)$是凸函数，那么对任意的 $x_0, v \in \mathbb{R}^n$，总存在 $Df(x_0)(v)$，而且对给定的 x_0，$Df(x_0)(v)$对 v 是正齐次的和凸的。

证明：先证明一个初步的结论。

如果 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是凸函数，且 $x_0<x_1<x_2$，则

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}。 \tag{1.3.4}$$

当 $x_0<x_1<x_2$ 时，x_1 可以写成 $x_1=\alpha x_0+(1-\alpha)x_2$，其中 $\alpha=\dfrac{x_2-x_1}{x_2-x_0} \in (0,1)$，故而

$$f(x_1) \leqslant \frac{x_2-x_1}{x_2-x_0} f(x_0)+\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0} f(x_2)。$$

由于$(x_1-x_0)>0$，因此上式即$\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leqslant \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$。同理可证另一不等式。

不等式(1.3.4)的意义可以从图 1.4 得到直观解释。

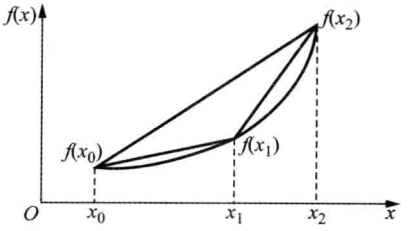


图 1.4　不等式(1.3.4)的说明

将 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(\infty)$限制在线段$[x_0, x_0+v]$上，令$\overline{f}(\lambda)=f(x_0+\lambda v)$，则 $f:[x_0, x_0+v] \to \mathbb{R}$ 成为 $\overline{f}:[0,1] \to \mathbb{R}$，它是凸函数。任取 $1 \geqslant \lambda_2>\lambda_1>\lambda_0 \geqslant 0$，那么根据前面讨论有$\dfrac{\overline{f}(\lambda_1)-\overline{f}(\lambda_0)}{\lambda_1-\lambda_0} \leqslant \dfrac{\overline{f}(\lambda_2)-\overline{f}(\lambda_0)}{\lambda_2-\lambda_0}$，取 $\lambda_0=0$，得到

$$\frac{f(x_0+\lambda_1 v)-f(x_0)}{\lambda_1} \leqslant \frac{f(x_0+\lambda_2 v)-f(x_0)}{\lambda_2},$$

随着 $\lambda \downarrow 0$，$\dfrac{f(x_0+\lambda v)-f(x_0)}{\lambda}$ 是单调递减序列，因此必有极限(可能是$-\infty$)。这说明 $Df(x_0)(v)$必定存在。由于当 $a>0$ 时，

$$Df(x_0)(a\upsilon)=\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{f(x_0+\lambda a\upsilon)-f(x_0)}{\lambda}$$
$$=a\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{f(x_0+\lambda a\upsilon)-f(x_0)}{a\lambda}=aDf(x_0)(\upsilon),$$

因此 $Df(x_0)(\upsilon)$是正齐次的。

最后证明 $Df(x_0)(\upsilon)$是凸的。当 $\mu\in[0,1]$时，

$$\frac{f(x_0+\lambda(\mu\upsilon_1+(1-\mu)\upsilon_2)-f(x_0)}{\lambda}$$
$$=\frac{f(\mu(x_0+\lambda\upsilon_1)+(1-\mu)(x_0+\lambda\upsilon_2))-f(x_0)}{\lambda}$$
$$\leqslant\frac{\mu[f((x_0+\lambda\upsilon_1)-f(x_0)]}{\lambda}+\frac{(1-\mu)[f(x_0+\lambda\upsilon_2)-f(x_0)]}{\lambda}。$$

让 $\lambda\downarrow 0$，这就得到 $Df(x_0)(\mu\upsilon_1+(1-\mu)\upsilon_2)\leqslant\mu Df(x_0)(\upsilon_1)+(1-\mu)Df(x_0)(\upsilon_2)$。 □

定理 1.3.3 表明，凸函数总存在方向导数，而且方向导数还是凸的。下面对凸函数定义一种微分，称它为次微分。它可以看作是梯度的推广。

定义 1.3.4 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}(\infty)$是一个凸函数，则集合

$$\partial f(x_0)=\{y;\forall x\in\mathbb{R}^n,f(x)-f(x_0)\geqslant\langle y,x-x_0\rangle\}$$

称为 f 在 x_0 的**次微分**。如果$\partial f(x_0)\neq\emptyset$，则称 f 在 x_0 是次可微的。 □

首先根据定理 1.3.3 的第 3 条性质，如果 f 在 x_0 处存在连续偏导数，那么梯度$\nabla f(x_0)\in\partial f(x_0)$。其次可以看出$\partial f(x_0)$总是闭的和凸的集合。下面的定理给出次微分的其他性质。

定理 1.3.5 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}(\infty)$是凸函数，且 $f(x_0)\neq\infty$，那么

$$\partial f(x_0)=\partial_\upsilon Df(x_0)(\upsilon)\mid_{\upsilon=0}=\partial_\upsilon Df(x_0)(0),$$

其中记号∂_υ 表示函数$Df(x_0)(\upsilon)$关于 υ 的次微分⑤。

证明：首先，根据方向导数的定义 $Df(x_0)(0)=\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{f(x_0+\lambda 0)-f(x_0)}{\lambda}=0$，因此，对任意的 υ，$\partial_\upsilon Df(x_0)(0)=\{y;Df(x_0)(\upsilon)\geqslant\langle y,\upsilon\rangle\}$。

如果 $y\in\partial f(x_0)$，那么对任意的 $\upsilon\in\mathbb{R}^n$，$f(x_0+\lambda\upsilon)-f(x_0)\geqslant\langle y,\lambda\upsilon\rangle=\lambda\langle y,\upsilon\rangle$，于是$\frac{f(x_0+\lambda\upsilon)-f(x_0)}{\lambda}\geqslant\langle y,\upsilon\rangle$，就是 $Df(x_0)(\upsilon)\geqslant\langle y,\upsilon\rangle$。这说明 $y\in\partial_\upsilon Df(x_0)(0)$，或者$\partial f(x_0)\subset\partial_\upsilon Df(x_0)(0)$。

另一方面，如果 $y\in\partial_\upsilon Df(x_0)(0)$，则对任意的 υ，$Df(x_0)(\upsilon)\geqslant\langle y,\upsilon\rangle$。由式(1.3.4)，当 $0<\lambda<1$ 时，

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+(x-x_0))-f(x_0)$$
$$\geqslant\frac{f(x_0+\lambda(x-x_0))-f(x_0)}{\lambda}$$

⑤ 这里记号的含义容易混淆。由定义 1.2.3，当$\upsilon\in\mathbb{R}^n$确定时，$Df(x_0)(\upsilon)\in\mathbb{R}$，而且 $Df(x_0):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是凸映射(定理 1.3.4)。对这个映射求次微分，变量是 υ，因此用记号∂_υ。

$$\geqslant Df(x_0)(x-x_0)\geqslant\langle y,x-x_0\rangle。$$

因此，$y\in\partial f(x_0)$，或者$\partial f(x_0)\supset\partial_v Df(x_0)(0)$。 □

根据定理 1.3.5，次微分的定义可以改成

$$\partial f(x_0)=\{y;\forall v\in\mathbb{R}^n,Df(x_0)(v)\geqslant\langle y,v\rangle\}。\tag{1.3.5}$$

定理 1.3.6　如果 $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}(\infty)$是凸函数，那么

(1) $f(x_0)=\min\{f(x)\}$的充分必要条件是 $0\in\partial f(x_0)$。

(2) 如果 $a\in\mathbb{R}(\geqslant 0)$，那么$\partial af(x_0)=a\partial f(x_0)$。

(3) 如果 $x_0\in\operatorname{dom} f\cap\operatorname{dom} g$，则$\partial(f+g)(x_0)\supset\partial f(x_0)+\partial g(x_0)$；如果进一步 f 或 g 在 x_0 连续，则$\partial(f+g)(x_0)=\partial f(x_0)+\partial g(x_0)$。

证明：(1) 根据定义，当 $0\in\partial f(x_0)$时，$f(x)-f(x_0)\geqslant\langle 0,x-x_0\rangle=0$，即 $f(x_0)$为最小值。反之，因为 $f(x_0)$为最小值，$f(x)\geqslant f(x_0)$，所以 $f(x)-f(x_0)\geqslant\langle 0,x-x_0\rangle=0$ 总成立，也就是 $0\in\partial f(x_0)$。

(2) 如果 $a=0$，则 af 是零函数，$\partial af(x)\equiv 0$，显然与右面相等。因此不妨认为 $a>0$。$y\in\partial af(x_0)$，那么 $af(x)-af(x_0)\geqslant\langle y,x-x_0\rangle$，于是 $a^{-1}y\in\partial f(x_0)$，$y\in a\partial f(x_0)$。反之，如果 $y\in a\partial f(x_0)$，$a^{-1}y\in\partial f(x_0)$，$f(x)-f(x_0)\geqslant\langle a^{-1}y,x-x_0\rangle$，$af(x)-af(x_0)\geqslant\langle y,x-x_0\rangle$，$y\in\partial af(x_0)$。

(3) 如果 $y_1\in\partial f(x_0)$，$y_2\in\partial g(x_0)$，那么 $f(x)-f(x_0)\geqslant\langle y_1,x-x_0\rangle$，$g(x)-g(x_0)\geqslant\langle y_2,x-x_0\rangle$。$f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))\geqslant\langle y_1+y_2,x-x_0\rangle$，$y_1+y_2\in\partial(f+g)(x_0)$。

现在证明当 f 在 x_0 连续的时候，有$\partial(f+g)(x_0)\subset\partial f(x_0)+\partial g(x_0)$。

任取 $\bar{y}\in\partial(f+g)(x_0)$，则 $f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))\geqslant\langle\bar{y},x-x_0\rangle$，就是

$$f(x)-f(x_0)-\langle\bar{y},x-x_0\rangle\geqslant g(x_0)-g(x)。\tag{1.3.6}$$

定义两个集合：

$$E=\{(x_E,r_E)\in\operatorname{dom} f\times\mathbb{R},f(x_E)-f(x_0)-\langle\bar{y},x_E-x_0\rangle<r_E\},$$

$$F=\{(x_F,r_F)\in\operatorname{dom} g\times\mathbb{R},g(x_0)-g(x_F)\geqslant r_F\}。$$

首先对每个 $x_E\in\operatorname{dom} f$，必定存在$(x_E,r_E)\in E$，所以 $\operatorname{dom} f=\operatorname{dom} E$，同理可证 $\operatorname{dom} g=\operatorname{dom} F$。其次因为 $f(x)$和 $g(x)$是凸函数，容易验证 E 和 F 都是凸集，由定理 1.2.3，存在 $n\in\mathbb{R}^n$，$\alpha\in\mathbb{R}$，使得这两个凸集分离，对一切$(x_E,r_E)\in E$和$(x_F,r_F)\in F$，

$$\langle x_E,n\rangle+\alpha r_E\leqslant\langle x_F,n\rangle+\alpha r_F。\tag{1.3.7}$$

由于 r_F 是下无界的，因此要使得这个不等式对一切 r_F 成立，只有 $\alpha\leqslant 0$。但是 α 不能为 0，否则，由于 f 在 x_0 连续，由$(x_0,r_{E(x_0)})\in E$，可以推出$(x_0+\varepsilon B_n)\times r_{E(x_0)}\subset E$。又因$(x_0,0)\in F$，于是$\langle x_0+\varepsilon y,n\rangle\leqslant\langle x_0,n\rangle$，对任意的单位向量 y 成立。此不等式就是$\langle\varepsilon y,n\rangle\leqslant 0$。这是不可能的，如果取 $y=\dfrac{n}{\|n\|}$。

令 $\bar{n}=|\alpha|^{-1}n$，则式(1.3.7)成为$\langle x_E,\bar{n}\rangle-r_E\leqslant\langle x_F,\bar{n}\rangle-r_F$，这说明

$$\langle x_E,\bar{n}\rangle-(f(x_E)-f(x_0)-\langle\bar{y},x_E-x_0\rangle)\leqslant\langle x_F,\bar{n}\rangle-(g(x_0)-g(x_F))。$$

由于$(x_0,0)\in F$,可取$x_F=x_0$,代入上式得

$$\langle x_E,\bar{n}\rangle-\langle x_0,\bar{n}\rangle+\langle\bar{y},x_E-x_0\rangle\leqslant f(x_E)-f(x_0),$$

就是$f(x_E)-f(x_0)\geqslant\langle\bar{y}-\bar{n},x_E-x_0\rangle$,$\bar{y}-\bar{n}\in\partial f(x_0)$。如取$x_E=x_0$,则$g(x_F)-g(x_0)\geqslant\langle\bar{n},x_F-x_0\rangle$,也就是$\bar{n}\in\partial g(x_0)$。所以$\bar{y}\in\partial f(x_0)+\partial g(x_0)$。□

最后,我们给出$\partial f(x_0)$与梯度$\nabla f(x_0)$之间的关系。

定理 1.3.7 如果f在x_0可微,则$\partial f(x_0)=\{\nabla f(x_0)\}$。

证明:因为当f在x_0可微时,$Df(x_0)(v)=\langle\nabla f(x_0),v\rangle$对任意的$v\in\mathbb{R}^n$成立。根据式(1.3.5),对任意$y\in\partial f(x_0)$,$\langle\nabla f(x_0),v\rangle\geqslant\langle y,v\rangle$;另外,用$-v$代替$v$可以得到$\langle\nabla f(x_0),-v\rangle\geqslant\langle y,-v\rangle$,即$\langle\nabla f(x_0),v\rangle\leqslant\langle y,v\rangle$。所以$\langle\nabla f(x_0),v\rangle=\langle y,v\rangle$。由于$v$是任意的,因此$y=\nabla f(x_0)$。□

进一步可以证明如果$\partial f(x_0)$只有一个元素y,那么f在x_0可微,而且$\nabla f(x_0)=y$。我们将这个性质和次微分其他的一些性质放在习题中。

练习

1. $x\in\mathbb{R}^n$,构造一个凸多面体$\Sigma=\mathrm{co}(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$,使得$x\in\mathrm{int}\Sigma$。
2. 证明凸函数的层集$\mathrm{lev}(f<\alpha)$是凸集。
3. 讨论引理 1.3.1 能否推广,即是否成立"$f:\mathbb{R}^n\to\mathfrak{R}$是凸函数,如果在$x_0\in\mathbb{R}^n$的邻域$B(x_0,\varepsilon)$内下有界,那么存在$\delta>0$,$f$在$B(x_0,\delta)$内是上有界的"?
4. 设$A\subset\mathbb{R}^n$是闭凸集,那么$a\in A$的充分必要条件是$S(x,A)\geqslant\langle a,x\rangle$对一切$x\in\mathbb{R}^n$成立。
5. 证明:设$\mu(x)$是正齐次的。如果成立$\mu(x+y)\leqslant\mu(x)+\mu(y)$,则$\mu(x)$是凸函数。
6. 设$A\subset\mathbb{R}^n$是凸集,$x\in X$,$a=\pi(x,\mathrm{cl}A)$,$y=\dfrac{x-a}{\|x-a\|}$,那么$S(y,A)=\langle y,a\rangle$。
7. 如果A是紧集,那么$S(x,A)$满足 Lipschitz 条件。
8. 设$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$是凸函数,$G$是$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$中的凸集。那么$f_{\mathrm{infr}}(x)=\inf\limits_{y\in G(x)}f(x,y)$是凸函数,其中的$G(x)=\{y\in\mathbb{R}^m;(x,y)\in G\}$。
9. 证明当A是$\mathbb{R}^n$的闭单位球时,$S(x,A)$是$\|x\|$,即 2-范数。这个结论在A是$\mathbb{R}^n$的开单位球时也成立。
10. 证明如果f是凸函数时,$\partial f(x_0)$是闭凸集。
11. 如果$f(x)=\|x\|$,$x\in\mathbb{R}^n$,证明:$\partial f(x)=\begin{cases}B_n, & x=0,\\ x/\|x\|, & x\neq0。\end{cases}$
12. 如果$f(x)=S(x,A)$,$A\subset\mathbb{R}^n$为凸集,证明:$\partial f(x)=\{x^*;x^*\in A,\langle x^*,x\rangle=f(x)\}$。
13. 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是正齐次的凸函数,而且$f$在$\mathbb{R}^n$中处处有限,那么$f(x)=S(x,\partial f(0))$。
14. 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是在$\mathbb{R}^n$中处处有限的凸函数,则$f$是次可微的,且$\partial f(x)$总是有界的。
15. 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,如果在$x_0\in\mathbb{R}^n$处$\partial f(x_0)$只有一个元素$y$,则$f$在$x_0$处可微,且$\nabla f(x_0)=y$。

1.4　半连续函数

在凸分析中，凸函数和半连续函数是两个密切相关的概念。在下一章考虑集合值映射的时候，半连续性是对集合值映射的一项基本要求。这一节介绍半连续函数，读者要注意比较本节的叙述半连续函数和下一章叙述半连续性集合值映射在定义和性质上的异同。

1.4.1　半连续函数及其基本性质

本节继续将$\mathbb{R}^n$当它内积空间来看待。$f:\mathbb{R}^n\to\mathfrak{R}$是一个函数，集合$A\subset\mathbb{R}^n$。

定义 1.4.1　$f:\mathbb{R}^n\to\mathfrak{R}$，如果$f(x_0)\geqslant\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=\limsup\limits_{x\to x_0}f(x)$①，则称$f$在$x_0\in\mathbb{R}^n$处上半连续。如果在任意的$x_0\in A$，$f$都是上半连续的，则称$f$是$A$上的一个**上半连续函数**。

如果$f(x_0)\leqslant\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=\liminf\limits_{x\to x_0}f(x)$，则称$f$在$x_0\in\mathbb{R}^n$处下半连续。如果在任意的$x_0\in A$，$f$都是下半连续的，则称$f$是$A$上的一个**下半连续函数**。　□

函数f在x_0连续的充分必要条件是它既是上半连续的又是下半连续的。

关于上半连续函数有下列的等价叙述。

(1) f在x_0是上半连续的。

(2) 对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$x\in B(x_0,\delta)\cap A$时，$f(x)\leqslant f(x_0)+\varepsilon$。

(3) 对任意的$a\in\mathbb{R}$，$\mathrm{lev}(f<a)$是开集。

(4) 对任意的$a\in\mathbb{R}$，$\mathrm{lev}(f\geqslant a)$是闭集。

无论从定义 1.4.1 还是从这些等价的叙述都可以看出，f在x_0上半连续的充分必要条件是$-f$在x_0是下半连续的。因此可以由上述关于上半连续函数的等价条件得到下半连续函数的性质。读者可以自行写出，本书不予重复。

定理 1.4.1　$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是下半连续的充分必要条件是它的上行图 epi f是$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$的闭集。

证明：设$(x_k,\alpha_k)\in\mathrm{epi}\ f$，$(x_k,\alpha_k)\to(x_0,\alpha_0)$。由于$(x_k,\alpha_k)\in\mathrm{epi}\ f$，因此$f(x_k)\leqslant\alpha_k$，由下半连续函数的定义，

$$f(x_0)\leqslant\liminf_{x_k\to x_0}f(x_k)\leqslant\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\alpha_0。$$

这说明$(x_0,\alpha_0)\in\mathrm{epi}\ f$，epi f是闭集。必要性获证。

① 记号$\limsup\limits_{x\to x_0}f(x)$的理解是：记$\delta$为一个充分小的正数，记$a(\delta)=\sup\limits_{x\in B(x_0,\delta)}f(x)$，那么$a(\delta)$随着$\delta$的递减而单调递减，因而必收敛，$\limsup\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{\delta\downarrow 0}a(\delta)=\inf\limits_{\delta\downarrow 0}\sup\limits_{x\in B(x_0,\delta)}f(x)$。$\liminf\limits_{x\to x_0}f(x)$的意义与此类似，不予赘述。

设 epi f 是闭集，取定一个 α，考虑序列 $\{x_k\}\subset \mathrm{lev}(f\leqslant\alpha)$，不妨认为 $x_k\to x_0$（否则考虑 $\{x_k\}$ 的子列），而 $f(x_k)\leqslant\alpha<\infty$。不妨认为 $f(x_k)\to c$（否则考虑 $\{x_k\}$ 的子列），那么 $c\leqslant\alpha$。如果 c 是有限实数，那么因 epi f 是闭集，$(x_k,f(x_k))\to(x_0,c)\in\mathrm{epi}\ f$，$f(x_0)\leqslant c\leqslant\alpha$，得 $x_0\in\mathrm{lev}(f\leqslant\alpha)$，即 $\mathrm{lev}(f\leqslant\alpha)$ 是闭集。如果 $c=-\infty$，那么我们断定 $f(x_0)=-\infty$，即 $x_0\in\mathrm{lev}(f\leqslant\alpha)$。否则 $f(x_0)=c_0>-\infty$，根据下半连续函数的等价定义 2，当 $x\in B(x_0,\delta)$ 时，$f(x)\geqslant c_0-\varepsilon$。当 k 充分大时，$x_k\in B(x_0,\delta)$，得到 $c\geqslant c_0-\varepsilon>-\infty$。矛盾。 □

要得到上半连续函数的相应结论需要定义下行图，但是本书不想作这样的定义。作为练习，读者可以尝试，并给出与定理 1.4.1 相应的结论。

定理 1.4.2 设 $\{x_k\}$ 是这样的序列，$x_k\to x_0$，$f(x_k)\to a$，即它本身和函数值都收敛。那么 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\ (\infty)$ 在 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 处是上半连续的充分必要条件是对任意的这种序列有 $a\leqslant f(x_0)$。

证明：因为 $x_k\to x_0$，所以存在 $\delta_k>0$，$\delta_k\to 0$，使得 $x_k\in B(x_0,\delta_k)$，则 $f(x_k)\leqslant\sup\limits_{x\in B(x_0,\delta_k)}f(x)$。两边取极限，得到 $a=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)\leqslant\limsup\limits_{x_k\to x_0}f(x)\leqslant f(x_0)$。必要性获证。

证明充分性，只要构造一个序列 $x_k\to x_0$，使得 $f(x_k)\to\limsup\limits_{x\to x_0}f(x)$，则由定理的条件 $\limsup\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant f(x_0)$，知道 f 是上半连续的。根据上确界的定义，对任意的 $\delta_k>0$，存在 $x_k\in B(x_0,\delta_k)$，$\sup\limits_{x\in B(x_0,\delta_k)}f(x)-\varepsilon\leqslant f(x_k)\leqslant\sup\limits_{x\in B(x_0,\delta_k)}f(x)$，令 $\delta_k\downarrow 0$，则 $x_k\to x_0$，并且 $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{x\in B(x_0,\delta_k)}f(x)-\varepsilon\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{x\in B(x_0,\delta_k)}f(x)$，由于 ε 是任意的，所以就是 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{x\in B(x_0,\delta_k)}f(x)$。 □

定理 1.4.2 的对应形式在连续函数场合称为归并原则，它在证明函数在某一点不连续的时候非常有用。

定理 1.4.3 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\ (-\infty)$ 是正常的上半连续函数②，如果 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界闭集，那么 f 在 A 上有界。

证明：如果 f 在 A 上无界，那么存在一个序列 $\{x_k\}\subset A$，$f(x_k)\to\infty$。由于 A 是有界闭集，$\{x_k\}$ 存在收敛子列，不妨认为 $\{x_k\}$ 就是收敛的。设 $x_k\to x_0$。由定理 1.4.2，$f(x_0)\geqslant\infty$。这和 f 的像集不含 ∞ 相矛盾。 □

定理 1.4.3 说明一个正常的上半连续函数，在一个有界闭集上都是上有界的。

定理 1.4.4 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\ (-\infty)$ 是上半连续函数，如果 f 在 $A\subset\mathbb{R}^n$ 上有界，那么存在一个连续函数序列 $\{f_k(x)\}$，使得对每个 $x\in A$，$f_k(x)\downarrow f(x)$。

证明：构造函数 $f_k(x)=\sup\limits_{z\in A}\{f(z)-k\|z-x\|\}$。根据定理条件，对一切 $x\in A$ 有 $f_k(x)<\infty$，并且由函数的定义可知 $f_k(x)\geqslant f_{k+1}(x)\geqslant f(x)$。

先证明 $f_k(x)$ 在 A 上是连续的。根据定义，对任意的 $y\in A$ 有

$$f_k(x)\geqslant f(z)-k\|z-x\|\geqslant f(z)-k\|z-y\|-k\|y-x\|,$$

$$f_k(x)\geqslant\sup_z\{f(z)-k\|z-y\|\}-k\|y-x\|=f_k(y)-k\|y-x\|;$$

② 一个定义在广义实数集上的函数称为正常的，如果它的有效定义域非空。

交换 x 和 y 可以得到 $f_k(y)\geqslant f_k(x)-k\|x-y\|$，于是 $|f_k(x)-f_k(y)|\leqslant k\|y-x\|$。因而 $f_k(x)$ 在 A 上是连续的。

接着证明对任意的 $x_0\in A$，$f_k(x_0)\downarrow f(x_0)$。分两种情形讨论，

(1) $f(x_0)\neq-\infty$。由于 f 在 A 上半连续，因此，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in B(x_0,\delta)$ 时，$f(x)\leqslant f(x_0)+\varepsilon$。这时，$f(x)-k\|x-x_0\|\leqslant f(x)\leqslant f(x_0)+\varepsilon$。

记 $M=\sup\limits_{x\in A}f(x)$，由于 M 是有限值，存在正整数 k_0，使得 $f(x_0)>M-k_0\delta$。那么当 $x\notin B(x_0,\delta)$ 时，有 $f(x)-k\|x-x_0\|\leqslant M-k\delta$，当 $k>k_0$ 时，$f(x)-k\|x-x_0\|\leqslant f(x_0)$。

总之，当 k 充分大时，在 A 上有 $f(x)-k\|x-x_0\|\leqslant f(x_0)+\varepsilon$，所以 $f_k(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon$，结合 $f_k(x_0)\geqslant f(x_0)$，得到 $f_k(x_0)\downarrow f(x_0)$。

(2) $f(x_0)=-\infty$。这时存在 $\delta>0$，使得当 $x\in B(x_0,\delta)$ 时，$f(x)=f(x_0)=-\infty$。对任意大的 N，存在 k_0，使得 $-N>M-k_0\delta$，当 $x\notin B(x_0,\delta)$ 且 $k>k_0$ 时，有 $f(x)-k\|x-x_0\|\leqslant M-k\delta<-N$。总之，在 A 上有 $f(x)-k\|x-x_0\|\leqslant -N$，所以 $f_k(x_0)=\sup\limits_{x\in A}\{f(x)-k\|x-x_0\|\}\leqslant -N$。$f_k(x_0)\downarrow -\infty=f(x_0)$。 □

下面的一些结论是关于半连续函数的运算的。我们只给出上半连续函数的情形，将有关下半连续函数的相应叙述留给读者。

(1) 如果 f_1 和 f_2 都是 $\mathbb{R}^n$ 上的上半连续函数，那么 f_1+f_2 和 $\alpha f_1(\alpha>0)$ 都是上半连续函数。

(2) 如果 f_1 和 f_2 都是 $\mathbb{R}^n$ 上的上半连续函数，且 $f_1>0$，$f_2>0$，那么 f_1f_2 也是上半连续函数。

(3) 如果 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是连续函数，而 $g:\mathbb{R}^m\to\mathfrak{R}$ 是上半连续的，那么 $g(F(x))$ 是上半连续函数。

(4) 设 $F:\mathbb{R}^m\to\mathfrak{R}$ 是上半连续的，$g:\mathbb{R}\to\mathfrak{R}$ 也是上半连续的，如果扩展 g 的定义 $g:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ 使得 $g(\infty)=\sup\ g(x)$，$g(-\infty)=\inf\ g(x)$，那么 $g(F(x))$ 是上半连续函数。

(5) 对于任意多个上半连续函数 f_i，$\inf\limits_i f_i$ 是上半连续的。

(6) 对于有限多个上半连续函数 f_i，$\sup\limits_i f_i$ 是上半连续的。

1.4.2　半连续函数的例子

这一小节的目的是讨论一些有用的半连续函数，在本小节中 X 总表示一个内积空间。

1) 指示函数 $\delta(x,A)$

设 $A\subset X$ 是一个非空集合，A 的**指示函数** $\delta(x,A):X\to R(\infty)$ 定义为

$$\delta(x,A)=\begin{cases}0 & x\in A,\\ \infty & x\notin A。\end{cases}$$

$\delta(x,A)$ 的性质由集合 A 决定。如果 A 是开集，则 $\delta(x,A)$ 是上半连续的；如果 A 是闭集，则 $\delta(x,A)$

是下半连续的。

2) 支撑函数 $S(x,A)$

根据定义 $S(x,A)=\sup\limits_{y\in A}\langle y,x\rangle$。由于对每一个给定的 y，内积函数 $f_y(x)=\langle y,x\rangle$ 是连续的，根据上一小节上半连续函数的运算性质(5)的对应性质，$S(x,A)=\sup\limits_{y\in A} f_y$ 是下半连续的。但是当 A 是有限集合的时候，它同时又是上半连续的，即为连续的。

3) 方向导数 $Df(x)(\upsilon)$

先证明一个有用的结果。

引理 1.4.1 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为凸的正齐次函数，那么

$$f(x)=S(x,\partial f(0))。$$

证明：由于 f 是正齐次的，因此 $f(0)=0$。根据次微分的定义，有 $\partial f(0)=\{x^*;f(x)\geqslant\langle x^*,x\rangle\}$。因此 $f(x)\geqslant\sup\limits_{x^*\in\partial f(0)}\langle x^*,x\rangle=S(x,\partial f(0))$。

现用反证法证明反向不等式也成立。如果存在 x_0，使得 $f(x_0)>S(x_0,\partial f(0))$，于是 $(x_0,S(x_0,\partial f(0)))\notin\operatorname{epi} f$。另一方面由于 f 是凸函数，由定理 1.3.1，它的上行图是闭的。根据引理 1.2.2 后的注 2，存在 $(y^*,\beta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$，使得

$$\langle x,y^*\rangle+\alpha\beta<\langle x_0,y^*\rangle+\beta S(x_0,\partial f(0))-\varepsilon^2$$

对一切 $(x,\alpha_x)\in\operatorname{epi} f$ 成立，注意 $\alpha_x\geqslant f(x)$，$\varepsilon^2>0$。根据支撑函数的定义，上式就是

$$\langle x,y^*\rangle+\alpha_x\beta<\langle x_0,y^*\rangle+\beta\sup_{x^*\in\partial f(0)}\langle x_0,x^*\rangle-\varepsilon^2。\tag{1.4.1}$$

由于 α_x 可以任意大，因此要使得上式成立只有 $\beta\leqslant 0$。但是如果 $\beta=0$，则式(1.4.1)成为 $\langle x,y^*\rangle<\langle x_0,y^*\rangle-\varepsilon^2$，取 $x=x_0$ 出现矛盾。所以只有 $\beta<0$。由于内积运算是线性的，可以取定 $\beta=-1$。于是式(1.4.1)成为

$$\langle x,y^*\rangle-\alpha_x<\langle x_0,y^*\rangle-\sup_{x^*\in\partial f(0)}\langle x_0,x^*\rangle-\varepsilon^2。\tag{1.4.2}$$

用 λx 代替 x，用 $f(\lambda x)$ 代替 α_x 代入上式，得到

$$\langle\lambda x,y^*\rangle-f(\lambda x)=\lambda(\langle x,y^*\rangle-f(x))<\langle x_0,y^*\rangle-\sup_{x^*\in\partial f(0)}\langle x_0,x^*\rangle-\varepsilon^2,$$

两边除以 λ，再令 $\lambda\to\infty$，得到 $\langle x,y^*\rangle-f(x)\leqslant 0$，就是 $y^*\in\partial f(0)$。又由于正齐次性，$(0,0)\in\operatorname{epi} f$，所以由式(1.4.2)得到

$$\sup_{x^*\in\partial f(0)}\langle x_0,x^*\rangle<\langle x_0,y^*\rangle-\varepsilon^2。$$

这是不可能的，因为 $y^*\in\partial f(0)$。所以对一切 $x\in\mathbb{R}^n$，$f(x)\leqslant S(x,\partial f(0))$。 □

引理 1.4.1 说明：一个正齐次的凸函数一定是某个凸集的支撑函数。

定理 1.4.5 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为凸函数，那么函数 $(x,\upsilon)\mapsto Df(x)(\upsilon)$ 是上半连续的。

证明：由于 f 的有效定义域是整个 $\mathbb{R}^n$，根据本节练习 6，有

$$Df(x)(\upsilon)=S(\upsilon,\partial f(x))。\tag{1.4.3}$$

下面利用定理 1.4.2 来证明本定理。设 (x_i,υ_i) 是这样的序列，它本身收敛，而且 $Df(x_i)(\upsilon_i)$ 也收敛。记 $(x_i,\upsilon_i)\to(x_0,\upsilon_0)$ 和 $Df(x_i)(\upsilon_i)\to\alpha$。如果能够证明 $\alpha\leqslant Df(x_0)(\upsilon_0)$，则定理获证。

我们分两步来证明这个事实。

首先证明$\bigcup_i \partial f(x_i)$有界。由式(1.4.3)$Df(x_i)(v_i)=S(v_i,\partial f(x_i))=\sup_{\bar{x}\in\partial f(x_i)}\langle v_i,\bar{x}\rangle$。因为$(x_i,v_i)$是确定的，因此$\partial f(x_i)$有界。如$\bigcup_i \partial f(x_i)$无界，那么可以选取$\bar{x}_i\in\partial f(x_i)$，$\bar{x}_i\to\infty$。

$$Df(x_i)(v_i)=\sup_{\bar{x}\in\partial f(x_i)}\langle v_i,\bar{x}\rangle\geqslant\langle v_i,\bar{x}_i\rangle,$$

左面是收敛的，因此右面必然有界。

其次证明$\alpha\leqslant Df(x_0)(v_0)$。由于$\partial f(x_i)$是闭集，因此存在$\hat{x}_i\in\partial f(x_i)$，使得$Df(x_i)(v_i)=\langle v_i,\hat{x}_i\rangle$。由于$\bigcup_i \partial f(x_i)$有界，所以$\{\hat{x}_i\}$存在收敛子列。不妨认为$\{\hat{x}_i\}$就是收敛的。$\hat{x}_i\to x^*$。于是$\alpha=\langle v_0,x^*\rangle$。另一方面，$\hat{x}_i\in\partial f(x_i)$，根据定义 1.3.3，对任意的$y\in\mathbb{R}^n$成立$f(y)-f(x_i)\geqslant\langle\hat{x}_i,y-x_i\rangle$。由于$f$的有效定义域是整个$\mathbb{R}^n$，因此局部有界，根据引理 1.3.1 后的注 2，f在x_0连续。令$i\to\infty$，得到$f(y)-f(x_0)\geqslant\langle x^*,y-x_0\rangle$，这意味$x^*\in\partial f(x_0)$。这样

$$Df(x_0)(v_0)=S(v_0,\partial f(x_0))\geqslant\langle v_0,x^*\rangle=\alpha。$$

完成了证明。　□

4) 共轭函数f^*

本小节的目的是对一个给定的函数f定义它的共轭函数。

定义 1.4.2　设$f:X\to\mathbb{R}(\infty)$为一个正常函数，$f^*:X\to\mathbb{R}(\infty)$称为$f$的**共轭函数**，如果$f^*(x^*)=\sup_{x\in X}\{\langle x^*,x\rangle-f(x)\}$③。　□

如同支撑函数的讨论一样，对任意的f，f^*一定是下半连续的。由定义 1.4.2，总有

$$f^*(x^*)+f(x)\geqslant\langle x^*,x\rangle,\tag{1.4.4}$$

式(1.4.4)称为 **Fenchel 不等式**。

作为例子，考察$\delta(x,A)$的共轭函数。依照定义，有

$$f^*(x^*)=\sup_{x\in X}\{\langle x^*,x\rangle-\delta(x,A)\}=\sup_{x\in A}\{\langle x^*,x\rangle\}=S(x^*,A)。$$

即一个集合的支撑函数是这个集合指示函数的共轭函数。下面证明当A是凸集的时候，指示函数反过来是支撑函数的共轭函数。先证明一个引理。

引理 1.4.2　如果$A\subset X$是凸集，那么$d(x,A)=\sup_{y\in B}\{\langle y,x\rangle-S(y,A)\}$，这里$d(x,A)$是$x$与$A$之间的距离。

证明：固定$x\in X$，记$\rho=d(x,A)$，那么$x\in\mathrm{cl}(A+\rho B)$。由支撑函数的定义和上一节练习 4，对一切$y\in X$，$\langle y,x\rangle\leqslant S(y,\mathrm{cl}(A+\rho B))$。而当$y\in B$时，

$$S(y,\mathrm{cl}(A+\rho B))=\sup_{z\in\mathrm{cl}(A+\rho B)}\langle y,z\rangle\leqslant\sup_{x_A\in A}\langle y,x_A\rangle+\sup_{b\in B}\rho\langle y,b\rangle\leqslant S(y,A)+\rho,$$

于是$\rho\geqslant\langle y,x_A\rangle-S(y,A)$，$y\in B$。现在证明$\rho=\sup_{y\in B}\{\langle y,x_A\rangle-S(y,A)\}$。

记$a=\pi(x,\mathrm{cl}\,A)$，那么$a\in\mathrm{cl}\,A$和$\rho=\|x-a\|$。令$y_0=\dfrac{x-a}{\|x-a\|}$，则$y_0\in B$。直接验证

③　为了表明共轭函数之间的对应关系，$f(x)$的共轭函数用$f^*(x^*)$表示。其中两个自变量是独立变化的。

$\langle y_0,x\rangle-\langle y_0,a\rangle=\langle y_0,x-a\rangle=\left\langle\frac{x-a}{\|x-a\|},x-a\right\rangle=\|x-a\|=\rho$。当 $a\in A$ 时，则成立 $\rho=\langle y_0,x\rangle-\langle y_0,a\rangle$。当 $a\in\mathrm{cl}\,A$，取 $a_k\in A$，$a_k\to a$，则 $\langle y_0,x\rangle-\langle y_0,a_k\rangle\to\rho$。 □

现在考察 $S(x^*,A)$ 的共轭函数。根据共轭函数的定义，有④

$$\begin{aligned}S^*(x,A)&=\sup_{x\in X}\{\langle x,x^*\rangle-S(x^*,A)\}\\&=\|x^*\|\sup_{x\in X}\left\{\left\langle x,\frac{x^*}{\|x^*\|}\right\rangle-S\left(\frac{x^*}{\|x^*\|},A\right)\right\}\\&=\|x^*\|d(x,A)\\&=\delta(x,A)\end{aligned}$$

最后的等式成立是因为根据定义 1.4.1 中要对 $S(x^*,A)$ 一切有定义的 x^* 成立。

上面的例子说明，对于指示函数 $\delta(x,A)$，当 A 是凸集的时候，有 $\delta^{**}(x,A)=\delta(x,A)$。这样情形并不是永远成立的，下面讨论成立的条件。

根据定义，$f^{**}(x)=\sup_{x^*}\{\langle x,x^*\rangle-f^*(x^*)\}$，由 Fenchel 不等式，即可得 $f^{**}(x)\leqslant f(x)$。

定理 1.4.6 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}(\infty)$是凸的下半连续函数，那么 $f^{**}(x)=f(x)$。

证明：如果 $f(x)\equiv\infty$，那么根据定义 $f^*(x^*)=\sup_{x\in R^n}\{\langle x,x^*\rangle-f(x)\}=-\infty$，从而 $f^{**}(x)\equiv\infty=f(x)$，结论成立。因此不妨认为 $\mathrm{dom}\,f\neq\emptyset$。

现在证明 $f^{**}(x)\geqslant f(x)$。假设结论不成立，那么存在 $x_0\in\mathrm{dom}\,f$，$f^{**}(x_0)<f(x_0)$。于是 $(x_0,f^{**}(x_0))\notin\mathrm{epi}\,f$。由定理 1.4.1，$\mathrm{epi}\,f$ 是闭凸集，由引理 1.2.2 后的注 2，存在 $(y^*,\beta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$，使得对任意的 $(x,\alpha_x)\in\mathrm{epi}\,f$ 成立

$$\langle y^*,x\rangle+\beta\alpha_x<\langle y^*,x_0\rangle+\beta f^{**}(x_0)-\varepsilon^2,\tag{1.4.5}$$

其中 ε^2 是一个与 (x,α_x) 无关的正数。如果 $\beta>0$，那么根据上行图的定义，α_x 可以趋向 ∞，这样左面趋向无穷大，这是不可能的。如果 $\beta=0$，则不等式(1.4.5)蜕化成 $\langle y^*,x\rangle<\langle y^*,x_0\rangle-\varepsilon^2$，当 $x=x_0$ 时导出 $0<-\varepsilon^2$，矛盾。因此只有 $\beta<0$，这样式(1.4.5)蕴含

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{y^*}{|\beta|},x_0\right\rangle-f^{**}(x_0)&>\sup_{(x,\alpha)\in\mathrm{epi}f}\left\{\left\langle\frac{y^*}{|\beta|},x\right\rangle-\alpha_x\right\}\\&>\sup_{x\in\mathrm{dom}\,f}\left\{\left\langle\frac{y^*}{|\beta|},x\right\rangle-f(x)\right\}=f^*\left(\frac{y^*}{|\beta|}\right),\end{aligned}$$

记 $\frac{y^*}{|\beta|}=x^*$，得到 $f^{**}(x_0)+f^*(x^*)<\langle x^*,x_0\rangle$，与 Fenchel 不等式矛盾。因此 $f^{**}(x)\geqslant f(x)$。定理获证。 □

最后给出 Fenchel 不等式成为等式的条件。

定理 1.4.7 $f:A\to\mathbb{R}(\infty)$为一个凸函数，$\mathrm{dom}\,f\neq\emptyset$，$x\in\mathrm{dom}\,f$。那么 $f(x)+f^*(x^*)=\langle x^*,x\rangle$ 的充分必要条件是 $x^*\in\partial f(x)$。

④ 这里规定 x^{**} 就是 x。

证明：如果 $x^* \in \partial f(x)$，根据次微分的定义，$f(y)-f(x) \geqslant \langle x^*, y-x\rangle$ 对一切 $y \in \operatorname{dom} f$ 成立。所以 $-f(x)+\langle x^*, x\rangle \geqslant -f(y)+\langle x^*, y\rangle$。根据共轭函数的定义：

$$f^*(x^*) = \sup_{y \in \operatorname{dom} f} \langle x^*, y\rangle - f(y) \leqslant \langle x^*, x\rangle - f(x),$$

结合 Fenchel 不等式，可得 $f(x)+f^*(x^*)=\langle x^*, x\rangle$。

上述过程可以逆向推导，得到 $f(y)-f(x) \geqslant \langle x^*, y-x\rangle$，即 $x^* \in \partial f(x)$。 □

定理 1.4.7 给出了次微分的另一个特征，当 f 是凸函数时，它是使得 Fenchel 不等式成为等式的那些 x^* 组成的集合。

练习

1. 证明函数 f 在 x_0 连续的充分必要条件是它既是上半连续的又是下半连续的。
2. 设 $f: \mathbb{R} \to \mathfrak{N}$ 是一个下半连续函数，而且 f 的有效定义域非空，那么 f 在 $\mathbb{R}$ 的任何有界子集上都是下有界的。进一步在任意紧集上是可以达到下界的。
3. 证明上半连续函数的等价叙述。
4. 证明上半连续函数的运算性质。
5. 证明如果 f 是凸的下半连续函数，且 $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$，那么 $\operatorname{dom} f^* \neq \emptyset$。
6. 如果 f 是凸函数，且 $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$，证明 $Df(x)(v)=S(v, \partial f(x))$（提示：应用引理 1.4.1）。

第2章

集合值映射和微分包含

本章讨论微分包含控制系统的两个基本概念：集合值映射和微分包含。集合值映射是微分包含的基础，因而前两节先讨论集合值函数，然后讨论微分包含。

2.1 集合值映射

集合值映射是微分包含的基础，因此讲述微分包含理论总是从集合值映射开始的。顾名思义，集合值映射的值是集合。为区别起见，而将第1章中定义的映射称为单值映射。本节将给出集合值映射的定义，并将单值映射的连续性和方向导数等概念推广到集合值映射。

2.1.1　集合值映射

X 和 Y 是两个线性赋范空间，分别用 $\|\cdot\|_X$ 和 $\|\cdot\|_Y$ 表示 X 和 Y 中的范数，但是在意义明确的时候，为了方便就省去下标。

定义 2.1.1　集合 $A\subset X$，映射 $F:A\to Y$ 称为是一个**集合值映射**，如果对每个 $x\in A$，$F(x)$ 是 Y 的一个子集。

对于集合值映射 $F:A\to Y$，称 A 为是 F 的定义域；所有使得 $F(x)\neq\emptyset$ 的 x 全体组成 F 的有效定义域，有效定义域记成 $\mathrm{dom}\ F$；$\bigcup\limits_{x\in A}F(x)$ 称为 F 的值域；称 $\mathrm{gra}F=\{(x,y);y\in F(x)\}$ 为 F 的图像。 □

从定义看称为集合值映射其实不符合映射的要求，因为它将每个 x 映射到 Y 中不止一个元素，应该说 $F:A\to\mathscr{P}Y$，其中 $\mathscr{P}Y$ 是 Y 的幂集，是映射才是恰当的。之所以将 F 的像集限制在 Y 中，是因为 Y 是一个线性赋范空间，我们需要用 Y 上的范数以及由此导出的拓扑。

除了特别说明，以后总用大写字母 F 来表示集合值映射，用小写字母 f 表示一般的映射，为了强调区别，将 f 称为单值映射。我们还假设，书中提及的集合值映射都满足 $\mathrm{dom}\ F\neq\emptyset$。

集合值映射是微分包含理论中最基本的概念，我们有如下进一步的注释。

注 1　如果集合值映射 $F:A\to Y$ 的定义域 $A\neq X$，总可以定义

$$\overline{F}(x)=\begin{cases}F(x) & x\in A,\\ \emptyset & x\notin A,\end{cases}$$

则 $\overline{F}(x)$ 是 $F(x)$ 的延拓，它的特性和 $F(x)$ 完全一致，因此以后说到集合值映射，总认为它的定义域是整个空间 X，但是其有效定义域未必是 X。 □

注 2　可以有两种方法定义集合值映射 $F(x)$ 的逆。设 $G\subset Y$，定义 $\{x;F(x)\subset G\}$ 为 G 的强原像，记为 $F^{-1}(G)(\mathrm{s})$；而 $\{x;F(x)\cap G\neq\emptyset\}$ 称为 G 的弱原像，记为 $F^{-1}(G)(\mathrm{w})$。显然 $F^{-1}(G)(\mathrm{w})\supset F^{-1}(G)(\mathrm{s})$。由于我们大多数时候采用弱原像，因此以后称弱原像为原像，还将 $F^{-1}(G)(\mathrm{w})$ 简写成 $F^{-1}(G)$。在用到强原像时会特别指出。 □

前文已经应用了集合值映射。例如 f 的上行图 $\mathrm{epi}f$ 就可以看成集合值函数 F 的图像，其中 F 定义为 $F(x)=\{a;a\in\mathbb{R},a\geqslant f(x)\}$。又如次微分 $\partial f(x)$ 也是集合值映射。

2.1.2　集合值映射的连续性

定义集合值映射的连续是一件非常精细的工作。读者必须注意其中的叙述。

定义 2.1.2　给定集合值映射 $F:X\to Y$，$x_0\in X$。称 F 在 x_0 是上半连续的，如果对任意的开集 O_Y，满足 $Y\supset O_Y\supset F(x_0)$，存在 $\delta>0$，使得 $F(B(x_0,\delta))\subset O_Y$。如果 F 在 X 中的任意点都是上半连续的，则称 F 是 X 上的**上半连续映射**。

称 F 在 x_0 是下半连续的，如果对任意的 $y\in F(x_0)$ 和任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意

的 $x\in B(x_0,\delta)$，$F(x)\cap B(y,\varepsilon)\neq\varnothing$。如果 F 在 X 中的任意点都是下半连续的，称 F 是 X 上的**下半连续映射**。

如果 F 在 x_0 既是上半连续的又是下半连续的，则称 F 在 x_0 连续。如果 F 在 X 中的任意点都是连续的，称 F 是 X 上的**连续映射**。 □

可以证明 $F(x)$ 是上半连续的充分必要条件是任意一个开集 $O_Y\subset Y$，$F^{-1}(O_Y)(\mathrm{s})$ 是 X 中的开集。这点与函数的连续相似。

此外还有一种定义半连续性的方法，为了区别定义 2.1.2，我们称它为 ε-半连续。

定义 2.1.3 称集合值映射 $F:X\to Y$ 在 $x_0\in X$ 是 ε-上半连续的，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x\in B(x_0,\delta)$ 时，$F(x)\subset F(x_0)+\varepsilon B$。或记成 $F(B(x_0,\delta))\subset B(F(x_0,\varepsilon))$。如果 F 在 X 中的任意点都是 ε-上半连续的，称 F 在 X 上是 ***ε*-上半连续映射**。

称集合值映射 $F:X\to Y$ 在 $x_0\in X$ 是 ε-下半连续的，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x\in B(x_0,\delta)$ 时，$F(x_0)\subset F(x)+\varepsilon B$。如果 F 在 X 中的任意点都是 ε-下半连续的，称 F 在 X 上是 ***ε*-下半连续映射**。 □

关于这两种半连续性有如下的说明。

由定义可以看出 ε-上半连续是比上半连续更严格的概念。由于 $F(x_0)+\varepsilon B$ 总是开集，因而上半连续必定是 ε-上半连续的，反过来未必成立。关于下半连续，因为 $F(x_0)\subset F(x)+\varepsilon B$ 蕴含对任意的 $y_0\in F(x_0)$，存在 $y\in F(x)$，使得 $\|y-y_0\|<\varepsilon$，即 $F(x)\cap B(y_0,\varepsilon)\neq\varnothing$；反之，如果 $F(x)\cap B(y_0,\varepsilon)\neq\varnothing$，即存在 $y\in F(x)$，使得 $\|y-y_0\|<\varepsilon$，成立 $F(x_0)\subset F(x)+\varepsilon B$。所以 ε-下半连续和下半连续是等价的。

例 2.1.1 考察 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$，对任意的 $x\in\mathbb{R}$，$F(x)=\{(x,y);y\in[0,\infty)\}$。

在像平面上，对每个 $(x,0)\in\mathbb{R}^2$，$F(x)$ 是由 x 出发垂直向上的射线（见图 2.1），因而 $\bigcup F(x)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的上半平面。我们说 F 在任意 $x\in\mathbb{R}$ 都不是上半连续的。例如考察 $F(0)$ 和 $\mathbb{R}^2$ 中的开集 $M=\{(x,y);|xy|<1\}$，显然 $M\supset F(0)$。但是对任意的 x，$x\neq0$，M 不能包含 $F(x)$，因此对任意的 $\delta>0$，不能成立 $M\supset F(B(0,\delta))$，即 $F(x)$ 在 $x=0$ 不是上半连续的。F 在任意 $x\in\mathbb{R}$ 都是下半连续的。因为取定 $(x,y_0)\in F(x)$，对于任意的 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\varepsilon$，$F(B(x,\delta))\cap B((x,y_0),\varepsilon)=B((x,y_0),\varepsilon)$。

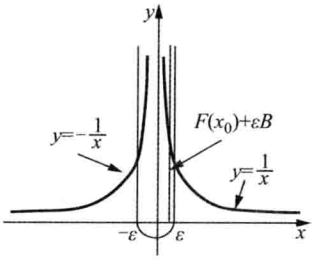


图 2.1 例 2.1.1 不是上半连续的但是 ε-上半连续的映射

但是按照定义 2.1.3，映射 $F(x)$ 是 ε-上半连续的。因为对任意的 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，就有 $F(x)=\{(x,y);y\in[0,\infty)\}\subset F(x_0)+\varepsilon B$。 □

例 2.1.1 中，在说明 $F(x)$ 不是上半连续的时候，关键是选择的开集 M 不能写成 $F(0)+\varepsilon B$ 的形式。

定义 2.1.4　集合值映射 $F:X\to Y$ 称为是闭值的，如果对每个 $x\in X$，$F(x)$ 是 Y 中的闭集；$F:X\to Y$ 称为是闭映射，如果 $\mathrm{gra}F$ 是 $X\times Y$ 中的闭集。 □

定义 2.1.4 可以演化出很多相应的定义，如果将闭换成开、有界、紧，等等。

根据定义可以得到的直接结论是：

(1) 如果 $F:X\to Y$ 是开值的，则 F 是开映射。

(2) 如果 $F:X\to Y$ 是闭映射，则 F 是闭值的。

注意这两个结论的逆命题都不成立。我们讨论何时它们会成立，限于篇幅，只考虑上半连续的情形，而将有关下半连续的叙述和结论留给读者。

定理 2.1.1　如果 $F:X\to Y$ 是上半连续的，那么它是闭映射的充分必要条件是它是闭值的。

证明：只要证明条件也是充分的。设 $\{(x_n,y_n)\}\subset \mathrm{gra}\ F$，$(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$，要证明 $(x_0,y_0)\in \mathrm{gra}\ F$。由于 F 是上半连续的，它是 ε-上半连续的，因此对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，$F(x)\subset F(x_0)+\varepsilon B$ 对一切 $x\in B(x_0,\delta)$ 成立。由于 $x_n\to x_0$，因此对于充分大的 n 成立 $y_n\in F(x_n)\subset F(x_0)+\varepsilon B$，而 $y_n\to y_0$，由 ε 的任意性，得 $y_0\in \mathrm{cl}F(x_0)$。已知 $F(x_0)$ 是闭集，所以 $y_0\in F(x_0)$，即 $(x_0,y_0)\in \mathrm{gra}\ F$。 □

定理 2.1.2　如果 $F:X\to Y$ 是紧值的，那么 F 是 ε-上半连续的必是上半连续的。

证明：根据条件对每个 $x\in X$，$F(x)$ 是紧集。设 M 是任意一个包含 $F(x)$ 的开集，那么对于任意的 $y\in F(x)\subset M$，存在 $B(y,\varepsilon_y)$，使得 $B(y,\varepsilon_y)\subset M$，那么 $\{B(y,\varepsilon_y);y\in F(x)\}$ 组成 $F(x)$ 的一个开覆盖，$F(x)$ 是紧集，因此存在有限子覆盖。记 $\{B(y_i,\varepsilon_i),i=1,2,\cdots,n\}$ 是有限子覆盖。再记 $\varepsilon_0=\min\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$，如果 F 是 ε-上半连续的，对这个 ε_0 存在 $\delta>0$，使得当 $x_1\in B(x,\delta)$ 时，$F(x_1)\subset F(x)+\varepsilon_0 B$，于是 $F(B(x,\delta))\subset F(x)+\varepsilon_0 B\subset M$。因此是上半连续的。 □

在例 2.1.1 中，$F(x)$ 是 ε-上半连续的而不是上半连续的，因为对每个 x，$F(x)$ 不是紧集。

对于两个集合值映射 $F(x)$ 和 $G(x)$，因为它们的值域在线性赋范空间中，因此可以定义线性运算 $\alpha F(x)+\beta G(x)$，而它们的乘法 $F(x)G(x)$ 则定义成 $F(x)\cap G(x)$。下面两个结论是关于乘法的连续性的。

定理 2.1.3　设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是两个 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 集合值映射，它们都是下半连续的，如果还满足：

(1) $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是凸值的；

(2) $G(x)$ 是局部有界的；

(3) 存在 $\gamma>0$，使得对每个 $x\in\mathbb{R}^n$ 和每个 $z\in\gamma B_m$[①]，$F(x)\cap(G(x)+z)\neq\emptyset$。

① 为了区分用下标表示空间的维数。

则 $F(x)G(x)$是下半连续的。

证明:任取 $x_0\in\mathbb{R}^n$和 $y_0\in F(x_0)\cap G(x_0)$。首先由于$G(x)$是局部有界的,因此存在$\delta_1>0$和 $b>0$,使得当 $x\in B(x_0,\delta_1)$时,$G(x)\subset bB_m$。其次,再任取 $\varepsilon>0$,取 $\eta=\dfrac{\varepsilon}{1+4b\gamma^{-1}}$,对这个 η,存在 $\delta\leqslant\delta_1$,当 $x\in B(x_0,\delta)$时,$F(x)\cap B(y_0,\eta)\neq\varnothing$,$G(x)\cap B(y_0,\eta)\neq\varnothing$(见图 2.2)。于是对每个 $x\in B(x_0,\delta)$存在 $g(x)\in G(x)\cap B(y_0,\eta)$,由于 $F(x)\cap B(y_0,\eta)\neq\varnothing$,因此存在 $z=z(x)\in B_m$,使得 $g(x)\in F(x)+2\eta z$。第三,根据条件(3),对每个上一步选定的 z,存在 $f(x)\in F(x)$,$\bar{g}(x)\in G(x)$,$\bar{g}(x)=f(x)-\gamma z$。

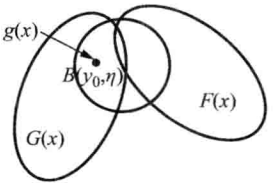


图 2.2 定理 2.1.3 中集合 $F(x)$,$G(x)$和 $B(y_0,\eta)$之间的关系

定义 $\lambda=\dfrac{\gamma}{\gamma+2\eta}$,则 $1-\lambda=\dfrac{2\eta}{\gamma+2\eta}=\dfrac{2\lambda\eta}{\gamma}$,

$$\begin{aligned}\lambda g(x)\in\lambda F(x)+2\lambda\eta z&=\lambda F(x)+\frac{2\lambda\eta}{\gamma}(f(x)-\bar{g}(x))\\&\subset\lambda F(x)+(1-\lambda)F(x)-(1-\lambda)\bar{g}(x)。\end{aligned}$$

由于 $F(x)$和 $G(x)$都是凸值的,因此 $\lambda g(x)+(1-\lambda)\bar{g}(x)\in F(x)\cap G(x)$,而且

$$\begin{aligned}&\|\lambda g(x)+(1-\lambda)\bar{g}(x)-y_0\|\\&\leqslant\lambda\|g(x)-y_0\|+(1-\lambda)\|\bar{g}(x)-y_0\|\\&\leqslant\lambda\eta+(1-\lambda)2b=\lambda\eta+\frac{4b\lambda\eta}{\gamma}=\lambda\eta\left(1+\frac{4b}{\gamma}\right)\leqslant\varepsilon。\end{aligned}$$

就是 $\lambda g(x)+(1-\lambda)\bar{g}(x)\in B(y_0,\varepsilon)$,$F(x)\cap G(x)\cap B(y_0,\varepsilon)\neq\varnothing$。 □

这个证明是构造性,具体找出了 $F(x)\cap G(x)\cap B(y_0,\varepsilon)$中的元素。从这个定理中可以看出两个集合值映射乘积的连续性不是必然的。下面的定理是关于上半连续的。

定理 2.1.4 设 $F:X\to Y$ 是上半连续映射,如果还满足:

(1) $F(x_0)\subset Y$ 是紧集;

(2) graG 是 $X\times Y$ 中的闭集。

则 $F(x)G(x)$在 x_0 是上半连续的。

证明:任取开集 $N\supset F(x_0)\cap G(x_0)$,我们的任务是要找到一个 $\delta>0$,使得当 $x\in B(x_0,\delta)$时,$N\supset F(x)\cap G(x)$。

如果 $F(x_0)\subset N$,那么因为 F 是上半连续映射,所以存在 $\delta>0$,使得当 $x\in B(x_0,\delta)$时,$N\supset F(x)\supset F(x)\cap G(x)$,结论获证。因而不妨认为 $F(x_0)\not\subset N$,即 $F(x_0)\cap N^c\neq\varnothing$。

记 $K=F(x_0)\cap N^c$,则 K 是紧集。对每个 $y\in K$,则 $y\notin G(x_0)$,即$(x_0,y)\notin\text{graG}$。由定理

的条件(2)，graG 是闭集，所以存在 $\delta_y>0$ 和 $\varepsilon_y>0$，使得$(B(x_0,\delta_y)\times B(y,\varepsilon_y))\cap \mathrm{gra}G=\emptyset$。这些 $B(y,\varepsilon_y)$组成了 K 的一个开覆盖，于是存在一个有限子覆盖，$\bigcup_{i=1}^{n}B(y_i,\varepsilon_{y_i})\supset K$。定义$M=\bigcup_{i=1}^{n}B(y_i,\varepsilon_{y_i})$，记这些 ε_{y_i} 对应的 δ_{y_i} 中最小的一个为 δ_1。任取 $x\in B(x_0,\delta_1)$，$(\{x\}\times M)\cap \mathrm{gra}G=\emptyset$，或者 $M\cap G(x)=\emptyset$。

由于 F 是上半连续映射的，对于开集 $M\cup N$，存在 δ_2，当 $x\in B(x_0,\delta_2)$时，$N\cup M\supset F(x)$。那么当 $x\in B(x_0,\delta)$，$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$时，同时成立 $N\cup M\supset F(x)$和 $M\cap G(x)=\phi$。于是

$$\begin{aligned}N\cap(F(x)\cap G(x))&\subset(M\cup N)\cap G(x)\\&=(M\cap G(x))\cup(N\cap G(x))\\&\subset N\cap G(x)\subset N。\end{aligned}$$

□

前面很多事实表明，与单值映射不同，集合值映射的上半连续和下半连续之间关系不很显然。下面转而讨论集合值映射的 Lipshitz 性。

定义 2.1.5　$F:X\to Y$，$x_0\in X$，称 F 在 $x_0\in X$ 是局部的 **Lipschitz 集合值映射**，如果存在常数 L 和 $\delta>0$，使得当 $x\in B(x_0,\delta)$时，

$$F(x)\subset F(x_0)+L\|x-x_0\|_X B_Y,\tag{2.1.1}$$

其中的 B_Y 是 Y 中的开单位球。这个 L 称为 F 在 x_0 的一个 Lipschitz 常数。

称 F 是全局 Lipschitz 的，如果式(2.1.1)对任意的 x_0，$x\in X$ 成立。 □

如果式(2.1.1)满足，那么对任意的 $y\in F(x)$，存在 $y_0\in F(x_0)$和 $b\in B_Y$，使得 $y=y_0+L\|x-x_0\|b$，则

$$\|y-y_0\|=L\|x-x_0\|\|b\|<L\|x-x_0\|。\tag{2.1.2}$$

反过来如果 $y\in F(x)$和 $y_0\in F(x_0)$总能够使得式(2.1.2)成立，那么必然有(2.1.1)成立。因此式(2.1.2)是 Lipschitz 集合值映射的等价条件。

容易证明如果 F 在 $x_0\in X$ 是局部 Lipschitz 的，那么 F 在 x_0 是 ε-上半连续的。下面的例子说明，一般情况下 Lipschitz 性质和上半连续无关。

例 2.1.2　考察 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$，对任意的 $x_0\in\mathbb{R}$，$F(x_0)=\{(x,y);(x-x_0)^2+y^2<1\}$。

由于对每个 x_0，$F(x_0)$是开集，因此取 $M=F(x_0)$，对任意的 $\delta>0$，M 不可能包含 $F(B(x_0,\delta))$。但是 F 是全局 Lipshitz 的，其中的 Lipschitz 常数可以取成 1。 □

定理 2.1.5　设 $F:X\to Y$ 是全局 Lipshitz 映射，它的 Lipschitz 常数是 L，那么将映射扩展为 $\bar F(x):X\to Y$，其中 $\bar F(x)=\overline{\mathrm{co}}F(x)$，那么 $\bar F$ 依然是 Lipshitz 映射，而且 Lipschitz 常数还可以是 L。

证明：先取定 $x_0\in X$，考察 $\bar F(x_0)=\overline{\mathrm{co}}F(x_0)\subset Y$。对任意的 $y_0\in\bar F(x_0)$和任意的 $\varepsilon>0$，存在 $y_{i0}\in F(x_0)$，$i=1,2,\cdots,s$ 和 λ_i，$\lambda_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i=1$，使得 $\left\|y_0-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i y_{i0}\right\|<\varepsilon$。

任取 $y_i\in F(x)$，$i=1,2,\cdots,s$，考虑

$$\left\|y_0-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i y_i\right\|\leqslant\left\|y_0-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i y_{i0}\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{s}\lambda_i y_{i0}-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i y_i\right\|$$

$$\leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \| y_{i0} - y_i \| < L \| x_0 - x \| + \varepsilon。$$

由于 ε 是任意的，因此 $y_0 \in \overline{\text{co}} F(x) + L \| x - x_0 \| B_Y$。 □

定理 2.1.5 说明，Lipschitz 性质可以拓广到像集的闭凸包上。

2.1.3 切锥和法锥

这里研究两种重要的集合值映射：切锥和法锥。

1) 锥的定义

在介绍凸集的时候，已经提过锥。一个集合 K 称为是锥，如果 $x \in K$，则 $\lambda x \in K$ 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\geqslant 0$)成立。K 称是一个**凸锥**，如果对任意的 $x, y \in K$ 和任意的 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($\geqslant 0$)，都成立 $\lambda x + \mu y \in K$。

根据定义容易证明对两个锥 K_1 和 K_2，它们之间的集合运算 $K_1 \cup K_2$，$K_1 \cap K_2$，$K_1 + K_2$，K_1 / K_2 等都是锥。如果 K_1 和 K_2 是凸锥，那么 $K_1 \cap K_2$，$K_1 + K_2$ 是凸锥。

如果 K 是一个锥，K 的**共轭锥** K^* 定义为

$$K^* = \{x^*; \langle x^*, x \rangle \geqslant 0, \forall x \in K\}。$$

不管 K 的性质如何，K^* 总是闭的和凸的。进一步，$-K^*$ 称为是 K 的**极锥**。当然极锥也总是闭凸集。图 2.3 是在 $\mathbb{R}^2$ 中锥、共轭锥和极锥关系的示意图。

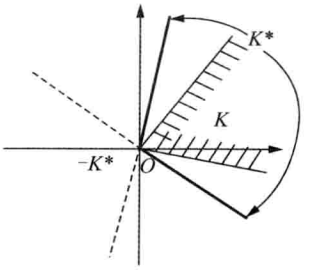


图 2.3 锥、共轭锥和极锥

根据定义容易证明对于任意的锥 K_1 和 K_2，成立 $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$。

为了后面的应用，这里略为讨论一下锥的支撑函数。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个锥，根据定义它的支撑函数 $S(x, K)$ 定义为，$S(x, K) = \sup\limits_{x_K \in K} (\langle x, x_K \rangle)$。由于锥具有性质，当 $y \in K$ 时，对任意 $\alpha \geqslant 0$，$\alpha y \in K$。因此当 $x^* \in -K^*$ 时，由于 $\langle x^*, x_K \rangle \leqslant 0$ 对一切 $x_K \in K$ 成立，因此 $S(x^*, K) = \sup\limits_{x_K \in K} (\langle x^*, \alpha x_K \rangle) \to 0, \alpha \to 0$；当 $x^* \notin -K^*$，至少存在一个 $x_K \in K$，使得 $\langle x^*, x_K \rangle > 0$，则 $S(x^*, K) = \sup\limits_{x_K \in K} (\langle x^*, \alpha x_K \rangle) \to \infty, \alpha \to \infty$。所以得到

$$S(x^*, K) = \delta(x^*, -K^*)。 \tag{2.1.3}$$

关于锥和它的极锥，下面的结论是基本的。

定理 2.1.6 设 $T \subset X$ 是一个闭凸锥，N 是它的极锥。$x \in X$，$\pi(x, T)$ 是 x 在 T 上的投

影，再记 $\pi(x,N)=x-\pi(x,T)$。那么：

(1) $\pi(x,N)\in N$；

(2) 如果 $x\notin N$，则 $\pi(x,N)$是 x 在 N 上的投影；

(3) $\|x\|^2=\|\pi(x,T)\|^2+\|\pi(x,N)\|^2$。

证明：(1) 根据第 1 章的式(1.2.2)，对任意的 $y\in T$ 成立：

$$\langle x-\pi(x,T),y-\pi(x,T)\rangle\leqslant 0。\tag{2.1.4}$$

T 是锥，因此 $0\in T$ 和 $2\pi(x,T)\in T$，分别将它们代入(2.1.4)，得到$\langle x-\pi(x,T),\pi(x,T)\rangle\geqslant 0$和$\langle x-\pi(x,T),\pi(x,T)\rangle\leqslant 0$。因而

$$\langle x-\pi(x,T),\pi(x,T)\rangle=0。\tag{2.1.5}$$

代回式(2.1.4)，对任意的 $y\in T$，$\langle x-\pi(x,T),y\rangle\leqslant 0$，就是 $\pi(x,N)=x-\pi(x,T)\in N$。结论 1 获证。

(2) 对任意的 $v^*\in N$，考察

$$\langle v^*-\pi(x,N),x-\pi(x,N)\rangle=\langle v^*,x-\pi(x,N)\rangle-\langle\pi(x,N),x-\pi(x,N)\rangle\leqslant 0,$$

这是因为 $\pi(x,T)=x-\pi(x,N)$，所以第一项不大于 0，而根据式(2.1.5)第二项等于 0。

(3) 因为

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\|x-\pi(x,T)+\pi(x,T)\|^2\\&=\|x-\pi(x,T)\|^2+\|\pi(x,T)\|^2+2\langle x-\pi(x,T),\pi(x,T)\rangle\\&=\|x-\pi(x,T)\|^2+\|\pi(x,T)\|^2。\end{aligned}$$

结论获证。 □

2) 切锥和法锥

先考虑切锥。

定义 2.1.6　$A\subset X$ 是一个集合，$x\in A$ 集合，称

$$T(x,A)=\mathrm{cl}\bigcup_{\lambda>0}\frac{A-x}{\lambda}\tag{2.1.6}$$

为在 x 处 A 的**切锥**；称 $T(x,A)$的极锥 $-T^*(x,A)$为 A 在 x 处的**法锥**，记成 $N(x,A)$。 □

注　将 $T(x,A)$称为锥是合理的，首先由于 $x\in A$，因而 $0\in T(x,A)$；又如果 $y\in T(x,A)$，如存在 $\lambda>0$，使得 $y\in\dfrac{A-x}{\lambda}$，从而 $\mu y\in\dfrac{A-x}{\lambda\mu^{-1}}$。 □

从定义就可以看出，如果 $X=\mathbb{R}^n$，$x\in A$ 为内点，那么 $T(x,A)=\mathbb{R}^n$，因此只有在 A 的边界点上讨论切锥才有非平凡的意义。

引理 2.1.1　如果 A 是凸集，$x\in A$，那么对任意的 $0<\lambda<\mu$，成立$\dfrac{A-x}{\mu}\subset\dfrac{A-x}{\lambda}$。

证明：对于任意的 $y\in A$，定义 $z=\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)x+\dfrac{\lambda}{\mu}y$，则 $z\in A$，并且 $y=\dfrac{\mu}{\lambda}z+\left(1-\dfrac{\mu}{\lambda}\right)x$，

$$\frac{y-x}{\mu}=\mu^{-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}z-\frac{\mu}{\lambda}x+x-x\right)=\frac{z-x}{\lambda}\in\frac{A-x}{\lambda}。$$ □

定理 2.1.7　如果 A 是凸集，$x\in A$，那么

$$T(x,A)=\{v;\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{-1}d(x+\lambda v,A)=0\}。$$

记号 $d(x+\lambda v,A)$表示向量 $x+\lambda v$ 到 A 的距离。这个定理是说，$d(x+\lambda v,A)$是 λ 的高阶无穷小时，v 属于切锥。这个定义与单值函数的切线吻合。

证明：如果 $v\in T(x,A)$，则对于任意的 $\varepsilon>0$ 存在 λ_0，使得 $v\in\frac{A-x}{\lambda_0}+\varepsilon B_X$，其中 B_X 是 X 中开单位球。根据引理 2.1.1，$v\in\frac{A-x}{\lambda}+\varepsilon B_X$，$0<\lambda\leqslant\lambda_0$。对这样的 λ，考察

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}d(x+\lambda v,A)&=\lambda^{-1}\inf_{y\in A}\|x+\lambda v-y\|\\&=\inf_{y\in A}\|v-\lambda^{-1}(y-x)\|\leqslant\varepsilon。\end{aligned}\tag{2.1.7}$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，因此当 $\lambda\downarrow 0$ 时，$\lambda^{-1}d(x+\lambda v,A)\to 0$。

反之，如果$\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{-1}d(x+\lambda v,A)=0$，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\lambda<\delta$ 时，式(2.1.7)成立。式(2.1.7)中最后一个不等式意味着 $v\in T(x,A)$。 □

定理 2.1.8 如果 A 是凸集，$x\in A$，那么

$$N(x,A)=\{v^*;\langle v^*,y-x\rangle\leqslant 0,y\in A\}。$$

证明：因为 $A-x\subset T(x,A)$，而按照定义 $N(x,A)=-T^*(x,A)$，因此对任意的 $y\in A$ 和任意的 $v^*\in N(x,A)$，$\langle v^*,y-x\rangle\leqslant 0$。即 $N(x,A)\subset\{v^*;\langle v^*,y-x\rangle\leqslant 0,y\in A\}$。

如果$\langle v^*,y-x\rangle\leqslant 0$ 对任意的 $y\in A$ 成立，则取 $v\in T(x,A)$，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\lambda>0$，$v\in\frac{A-x}{\lambda}+\varepsilon B$，或者写成存在 $y\in A$，使得 $\left\|v-\frac{y-x}{\lambda}\right\|\leqslant\varepsilon$，那么

$$\begin{aligned}\langle v^*,v\rangle&=\left\langle v^*,v-\frac{y-x}{\lambda}+\frac{y-x}{\lambda}\right\rangle\\&=\left\langle v^*,v-\frac{y-x}{\lambda}\right\rangle+\left\langle v^*,\frac{y-x}{\lambda}\right\rangle\\&\leqslant\left\langle v^*,v-\frac{y-x}{\lambda}\right\rangle\leqslant\varepsilon\|v^*\|。\end{aligned}$$

最后不等式中应用了 Schwarz 不等式。由于 ε 是任意的，因此$\langle v^*,v\rangle\leqslant 0$ 对一切 $v\in T(x,A)$成立，就是 $v^*\in N(x,A)$，或者写成 $N(x,A)\supset\{v^*;\langle v^*,y-x\rangle\leqslant 0,y\in A\}$。 □

如果 $A\subset X$，$x\in A$，下面的定理给出了 $T(x,A)$和 $N(x,A)$之间的联系。

定理 2.1.9 设对每个 $x\in A\subset\mathbb{R}^n$，$T(x,A)$是紧凸集，那么 $\mathrm{gra}N(x,A)(x\in A)$是闭集的充分必要条件是 $T(x,A)$是下半连续的。

证明：先证明充分性。设$(x_n,v_n^*)\in\mathrm{gra}N(x,A)$，$(x_n,v_n^*)\to(x,v^*)$，要证明 $\mathrm{gra}N(x,A)(x\in A)$是闭集只要证明 $v^*\in N(x,A)$。任取 $v\in T(x,A)$，由于 $T(x,A)$是下半连续的，根据本节练习题 2 的(2)，存在 $x_n\to x$，$v_n\in T(x_n,A)$，$v_n\to v$。因为 $v_n^*\in N(x_n,A)$，所以$\langle v_n,v_n^*\rangle\leqslant 0$。然后让 n 趋向无穷大，则得到$\langle v,v^*\rangle\leqslant 0$。注意在充分性的证明中，没有用到 $T(x,A)$是紧凸集这个条件。

任取 $v\in T(x,A)$，我们要证明存在一个序列 $x_n\to x$，使得存在 $v_n\in T(x_n,A)$，$v_n\to v$。由于

$v\in T(x,A)$，而已知 $T(x,A)$是紧凸集，根据定理 2.1.6，存在 $v_n=\pi(v,T(x_n,A))\in T(x_n,A)$ 和 $v_n^*=\pi(v,N(x_n,A))\in N(x_n,A)$，使得有 $v=v_n+v_n^*$，并且 $\|v_n^*\|\leqslant\|v\|$。因此$\{v_n^*\}$存在收敛子列，不妨设$\{v_n^*\}$就是收敛的，$v_n^*\to v^*$。由于 $\mathrm{gra}N(x,A)$是闭的，故 $v^*\in N(x,A)$。$v_n=v-v_n^*\to v-v^*$。如果能证明 $v^*=0$，则 $v_n\to v$。根据定理 2.1.4，

$$\langle v^*,v-v^*\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle v_n^*,v-v_n^*\rangle=0,$$

$0=\langle v^*,v-v^*\rangle=\langle v^*,v\rangle-\langle v^*,v^*\rangle$，因而 $\|v^*\|^2=\langle v^*,v^*\rangle=\langle v^*,v\rangle\leqslant 0$，只有 $\|v^*\|=0$。 □

2.1.4　集合值映射的微分

上一小节定义了切锥，现在继续这方面的讨论。

定义 2.1.7　$A\subset X,x\in A$，集合

$$T_+(x,A)=\{v;\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{-1}d(x+\lambda v,A)=0\}$$

称为是 A 在 x 处的**正切锥**；集合

$$T_-(x,A)=\{v;\liminf_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{-1}d(x+\lambda v,A)=0\}$$

称为是 A 在 x 处的**伴随切锥**。 □

回忆下极限的定义，如果$\liminf_{x\to x_0}f(x)=c$，则：①存在 $x_n\to x_0$ $f(x_n)\to c$；②对任意的 $x_n\to x_0$，$f(x_n)\to\bar{c},\bar{c}\geqslant c$。

注 1　根据定义 $T_+(x,A)\subset T_-(x,A)$。 □

注 2　定理 2.1.7 证明了当 A 是凸集的时候，$\lambda^{-1}d(x+\lambda v,A)$随着 λ 单调下降，因此极限 $\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{-1}d(x+\lambda v,A)$总存在，所以对凸集而言 $T_+(x,A)=T_-(x,A)$。 □

例 2.1.3　考虑单值映射 $f(x)=|x|\sin\dfrac{1}{|x|},x\neq 0;f(0)=0,A=\bigcup\mathrm{epi}f(x)$。在 $x=0$ 处，正切锥和伴随切锥分别如图 2.4 所示。 □

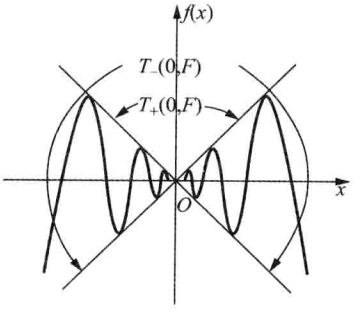


图 2.4　例 2.1.3 的正切锥和伴随切锥

设 $A\subset\mathbb{R}^n,\alpha>0$ 定义集合 $D_\alpha\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 为

$$D_\alpha=\{(x,x^0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},x^0\geqslant\alpha d(x,A)\}。$$

在$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 中，D_α 像一个盆(图 2.5)。因此称 D_α 为由 A 生成的斜率为 α 的实心盆。

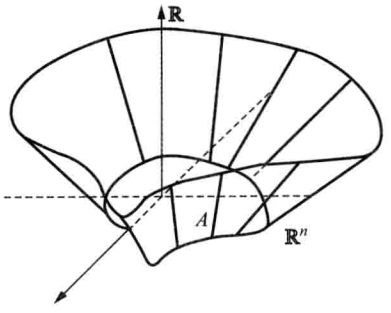


图 2.5 D_α 示意图

定理 2.1.10 设 $A\subset\mathbb{R}^n,\alpha>0,\hat{x}\in A$,则

$$T_+((\hat{x},0),D_\alpha)\supset\{(\upsilon,\upsilon^0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\upsilon^0\geqslant\alpha d(\upsilon,T_+(\hat{x},A))\}。$$

证明:设 $\upsilon^0\in\mathbb{R},\upsilon^0\geqslant\alpha d(\upsilon,T_+(\hat{x},A))$。因为 $T_+(\hat{x},A)$ 是闭的,存在 $\omega\in T_+(\hat{x},A)$,使得 $d(\upsilon,T_+(\hat{x},A))=\|\upsilon-\omega\|$,则 $\upsilon^0\geqslant\alpha\|\upsilon-\omega\|$。于是

$$\alpha d(\hat{x}+\lambda\upsilon,A)\leqslant\alpha d(\hat{x}+\lambda\omega,A)+\alpha\lambda\|\upsilon-\omega\|\leqslant\alpha d(\hat{x}+\lambda\omega,A)+\lambda\upsilon^0。$$

两边除以 λ,得到 $\limsup\limits_{\lambda\downarrow0}\lambda^{-1}\alpha d(\hat{x}+\lambda\upsilon,A)\leqslant\upsilon^0$。这说明,对任意的 $\varepsilon>0$,当 λ 充分小时,$\lambda^{-1}\alpha d(\hat{x}+\lambda\upsilon,A)\leqslant\upsilon^0+\varepsilon$。就是 $(\hat{x}+\lambda\upsilon,\lambda\upsilon^0+\lambda\varepsilon)\in D_\alpha$,或者

$$\lim_{\lambda\downarrow0}\lambda^{-1}d\left(\left(\begin{bmatrix}\hat{x}\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda\upsilon\\\lambda\upsilon^0\end{bmatrix}\right),D_\alpha\right)\leqslant\varepsilon。$$

由于 ε 是任意的,所以 $(\upsilon,\upsilon^0)\in T_+((\hat{x},0),D_\alpha)$。 □

引理 2.1.2 设 $F:X\to Y$ 是集合值的 Lipschitz 映射,其 Lipschitz 常数是 L,那么

$$d((x,y),\mathrm{gra}F)\leqslant d(y,F(x))\leqslant(1+L)d((x,y),\mathrm{gra}F)。$$

证明:在 1.1 节中,我们证明在有限维线性空间所有的范数都等价。因此在 $X\times Y$ 上,不失一般性地定义 $(x,y)\in X\times Y,\|(x,y)\|=\|x\|_X+\|y\|_Y$。对任意的 $\varepsilon>0$,根据距离的定义,存在 $z\in F(x)$,使得 $d(y,F(x))\geqslant\|y-z\|-\varepsilon$。又

$$d((x,y),\mathrm{gra}F)\leqslant\|(x,y)-(x,z)\|_{X\times Y}=\|y-z\|_Y\leqslant d(y,F(x))+\varepsilon,$$

由于 ε 是任意的,所以得到左面的不等式。

同样对任意 $\varepsilon>0$,根据定义存在 $(x_0,y_0)\in\mathrm{gra}F$,使得

$$\begin{aligned}d((x,y),\mathrm{gra}F)&\geqslant\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_{X\times Y}-\varepsilon\\&=\|x-x_0\|_X+\|y-y_0\|_Y-\varepsilon。\end{aligned}$$

对这个 x,存在 $z\in F(x)$,由 Lipschitz 性,得 $\|z-y_0\|_Y\leqslant L\|x-x_0\|_X$。

$$\begin{aligned}d(y,F(x))&\leqslant\|y-z\|_Y\\&\leqslant\|y-y_0\|_Y+\|y_0-z\|_Y\\&\leqslant\|y-z\|_Y+L\|x-x_0\|_X\\&\leqslant(1+L)(\|y-z\|_Y+\|x-x_0\|_X)\\&\leqslant(1+L)(d((x,y),\mathrm{gra}F)+\varepsilon)。\end{aligned}$$

同样由于 ε 是任意的，右面的不等式也获证。 □

最后我们定义集合值映射的导数。回忆单值映射 $y=f(x)$，在 $\mathbb{R}^2$ 中，它的图像是 $(x,f(x))$ 组成的集合，或者是 $\mathrm{gra}f=\{(x,f(x))\}$。用 $f'(x_0)$ 表示 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，那么在 x_0 处的切向量就是 $(x,f'(x_0)x)$，用现在的眼光看，它是一个锥。据此我们来定义集合值映射的导数。

定义 2.1.8　$F:X\to Y$ 为集合值映射，$\mathrm{gra}F$ 是它的图像。设 $(x_0,y_0)\in\mathrm{gra}F$，则

$$\mathrm{gra}D_+F(x_0,y_0)=T_+((x_0,y_0),\mathrm{gra}F)$$

为 $\mathrm{gra}F$ 在 (x_0,y_0) 处的正切锥。类似地，称

$$\mathrm{gra}D_-F(x_0,y_0)=T_-((x_0,y_0),\mathrm{gra}F)$$

为 $\mathrm{gra}F$ 在 (x_0,y_0) 处的伴随切锥。 □

如果 $(x,y)\in\mathrm{gra}D_+F(x_0,y_0)$，根据图像的定义，它等价于 $y\in D_+F(x_0,y_0)(x)$。在这个意义上，可以将 $D_+F(x_0,y_0)$ 称为 F 在 (x_0,y_0) 的导数，称 $D_+F(x_0,y_0)(x)$ 为微分。类似地，称 $D_-F(x_0,y_0)$ 为 F 在 (x_0,y_0) 的伴随导数，称 $D_-F(x_0,y_0)(x)$ 为伴随微分。

定理 2.1.11　设 $F:X\to Y$ 为 Lipschitz 集合值映射，则

$$D_+F(x_0,y_0)(x)=\{y;\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{-1}d(y_0+\lambda y,F(x_0+\lambda x))=0\};$$

$$D_-F(x_0,y_0)(x)=\{y;\liminf_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{-1}d(y_0+\lambda y,F(x_0+\lambda x))=0\}。$$

证明：用 L 表示 F 的 Lipschitz 常数。根据引理 2.1.2

$$\begin{aligned}&d((x_0+\lambda x,y_0+\lambda y),\mathrm{gra}F)\\ \leqslant&d(y_0+\lambda y,F(x_0+\lambda x))\\ \leqslant&(1+L)d((x_0+\lambda x,y_0+\lambda y),\mathrm{gra}F)。\end{aligned}$$

同时乘以 λ^{-1}，再令 $\lambda\downarrow 0$。如果 $(x,y)\in T_+((x_0,y_0),\mathrm{gra}F)$，则前后两项都为 0，因此 $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{-1}d(y_0+\lambda y,F(x_0+\lambda x)=0$。

反之，如果 $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{-1}d(y_0+\lambda y,F(x_0+\lambda x)=0$，则因距离映射是非负的，利用第一个不等式也得到 $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}d((x_0+\lambda x,y_0+\lambda y),\mathrm{gra}F)=0$，即 $(x,y)\in T_+((x_0,y_0),\mathrm{gra}F)$。

关于伴随微分的证明完全一致。从略。 □

练习

1. 证明 $F(x)$ 是上半连续的充分必要条件是任意一个开集 $O_Y\subset Y$，$F^{-1}(O_Y)$(s) 是 X 中的开集。
2. 证明集合值映射的下半连续等价于：
 (1) F 在 x_0 是下半连续的，如果对任意的 $y_0\in F(x_0)$ 和任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意的 $x\in B(x_0,\delta)$，存在 $y\in F(x)\cap B(y_0,\varepsilon)$。
 (2) F 在 x_0 是下半连续的，如果对任意的 $y_0\in F(x_0)$，存在 $\{x_n;x_n\in X\}$，$x_n\to x_0$ 和 $\{y_n;y_n\in F(x_n)\}$，$y_n\to y_0$。

3. 如果集合值映射 $F(x)$是下半连续的，那么它是ε-下半连续的吗？反之是否成立？对否定的答案给出反例。

4. (1) 如果 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是上半连续的集合值映射，$g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$是连续函数，那么 $F\circ g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$是上半连续的。

 (2) 如果 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是下半连续的集合值映射，$g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$是连续函数，那么 $F\circ g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$是下半连续的。

5. 证明下面叙述等价：

 (1) 集合值映射 $F(x)$是ε-上半连续的。

 (2) $\limsup\limits_{x\to x_0}F(x)=F(x_0)$(根据上极限定义$\limsup\limits_{x\to x_0}F(x)=F(x_0)$等价于

 $$\{u_0;\exists\, x_n\to x_0,u_n\in F(x_n),u_n\to u_0\}\subset F(x_0))。$$

 (3) 如果 $u\notin F(x_0)$，存在开集 W 和 V，满足 $u\in W\subset Y$ 和 $x_0\in V\subset X$，使得 $V\cap F^{-1}(W)=\varnothing$。

6. 分别给出例子说明：

 (1) 如果 $F:X\to Y$ 是开映射，但是可以存在 $x_0\in X$，$F(x_0)$不是开集。

 (2) 如果 $F:X\to Y$ 是闭值的，但是 F 不是闭映射。

7. 设 $F:X\to Y$ 是集合值映射，如果 graF 是闭集，而且对任意 $x_0\in X$，$\delta>0$，集合

 $$M_\delta=\mathrm{cl}\{F(x);x\in B(x_0,\delta)\}$$

 是紧集，则 F 是上半连续的。

8. 设 $K_1,K_2\subset\mathbb{R}^n$为两个闭凸锥，证明下列结论，并讨论对于哪个结论可以去掉闭或凸的要求：

 (1) $(K_1+K_2)^*=K_1^*\cap K_2^*$。

 (2) $(K_1\cap K_2)^*=\mathrm{cl}(K_1^*+K_2^*)$。

 (3) $K_1^{**}=K_1$。

 (4) 如果 $\Lambda:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$为线性映射，并且 $\Lambda\mathbb{R}^m-K_1=\mathbb{R}^n$，那么$(\Lambda^{-1}K_1)^*=\Lambda^*K_1^*$。

9. 设 $x_i\in\mathbb{R}^n$，$i=1,2,\cdots,m$，记 $K=\{y;\langle y,x_i\rangle\geqslant 0,i=1,2,\cdots m\}$；那么，$K$ 是闭凸锥，而且 $K^*=\overline{\mathrm{conx}}(x_i,i=1,2,\cdots,m)$。

10. 设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是凸紧值的(即对每个 x，$F(x)$是凸紧集)，那么 F 是连续的当且仅当支撑函数 $x\to S(y^*,F(x))$对每个 y^*是连续的。

11. 设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是集合值映射，如果 graF 是闭的，而且存在 $\delta>0$，集合

 $$M_\delta=\mathrm{cl}\{F(x);\|x-x_0\|<\delta\}$$

 是紧的，那么 F 在 x_0 是上半连续的。

12. 设 $F:\mathbb{R}^n\to A$ 是集合值映射，$A\subset\mathbb{R}^m$是紧集，如果 graF 是闭的，那么 F 是闭值的，且是上半连续的。

2.2　集合值映射的选择

集合值映射 F 在每个 x 上的值 $F(x)$ 是一个集合，于是可以从这个集合中选出一个元素来构造单值映射。这是集合值映射特有的问题，称为选择。本节对此作专门的讨论。

设 $F:A\to Y$ 是一个集合值映射，如果对每个 $x\in A$，$F(x)\neq\emptyset$，则可以在 $F(x)$ 中选取一个元素 $y\in F(x)$，那么单值映射 $x\mapsto y$ 就是 F 在 A 上的一个**选择**。换言之，一个选择就是对 $x\in A$ 决定一个单值映射 $y=f(x)$，使得 $f(x)\in F(x)$。只要对某个 $x\in A$，集合 $F(x)$ 有两个或两个以上的元素，那么 F 在 A 上的选择就不是唯一的。选择的目的是找到一个合适的单值映射，使它具有理想的性质。例如能使得 $f(x)$ 具有局部的 Lipschitz 性质，那么微分方程 $\dot{x}=f(x)$ Cauchy 问题的解局部地存在而且唯一，所以对于微分包含而言，一个满足局部 Lipschitz 条件的选择是一种理想的选择。可惜找 Lipschitz 选择是一个过于奢侈的愿望，即使集合值映射有很好的连续性也不能保证存在 Lipschitz 选择。通常考虑的选择有连续选择、可测选择和近似选择，前两者指选出的单值映射是连续的或者可测的，后者实际是选取一个性质较好的函数序列，使得这个序列逼近 $\mathrm{cl}F(x)$。本书只考虑连续选择和连续的近似选择。

2.2.1　最小选择

定义 2.2.1　设 $A\subset X$ 是一个集合，如果 A 中存在范数最小的元素，则称这些元素为 A 的**最小范元**，最小范元组成的集合记作 $m(A)$[①]。 □

一般来说不能保证最小范元的存在，但是如果 A 是闭集的时候，最小范元存在；进一步，当 A 是凸闭集的时候，最小范元唯一存在。因此当 A 是凸闭集时候，$m(A)$ 只有一个元素，为了方便，也将这个元素记成 $m(A)$。

设 A 是凸闭集，由于 $m(A)=\underset{x\in A}{\arg\min}\,\|x\|$[②]，因此 $m(A)=\pi(0,A)$。根据第 1 章引理 1.2.2 的注 2，对于凸闭集来说，$\langle m(A)-x_A,m(A)\rangle\leqslant 0$ 对任意的 $x_A\in A$ 成立。

定理 2.2.1　设集合值映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是连续和具有凸闭值的，那么 $f(x)=m(F(x))$ 是一个连续选择。

证明：由于 F 是凸闭值，因此对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$，$m(F(x))$ 只有唯一元。现在证明 $x\mapsto$

① 这个记号与 A 的 Lebesgue 测度相同。因为是通用记号，不宜改动，下文在可能产生混淆处本书会特别指出，而在不加说明时 $m(A)$ 总指最小范元

② 记号 $\underset{x\in A}{\arg\min}f(x)$ 表示 A 中使得 $f(x)$ 达到极小值的那些自变量 x。类似地可以有 $\underset{x\in A}{\arg\max}f(x)$。$\underset{x\in A}{\arg}f(x)=0$ 就是方程 $f(x)=0$ 在集合 A 中的根。

$m(F(x))$是连续的。记 $y_0=m(F(x_0))$。

如果 $y_0=0\in\mathbb{R}^m$,那么根据 $F(x)$是下半连续的,存在 $\delta>0$,当 $x\in B(x_0,\delta)$时,$F(x)\cap B(0,\varepsilon)\neq\varnothing$,就是存在 $y(x)\in F(x)\cap B(0,\varepsilon)$,那么根据最小范元的定义,$\|m(F(x))\|\leqslant\|y(x)\|\leqslant\varepsilon$。就是 $f(x)$在 x_0 连续。

如果 $y_0\neq0$,根据 $F(x)$是上半连续的,存在 $\delta>0$,当 $x\in B(x_0,\delta)$时,

$$F(x)\subset F(x_0)+\frac{\varepsilon}{\|y_0\|}B_m, \tag{2.2.1}$$

也是存在 $y(x_0)\in F(x_0)$,$m(F(x))\in\left(y(x_0)+\frac{\varepsilon}{\|y_0\|}B_m\right)$,即 $\|m(F(x))-y(x_0)\|<\frac{\varepsilon}{\|y_0\|}$。于是$|\langle y_0,m(F(x))-y(x_0)\rangle|\leqslant\|y_0\|\|m(F(x))-y(x_0)\|<\varepsilon$;根据定义 2.2.1 后面的注释,$\langle y_0-y(x_0),y_0\rangle\leqslant0$,即 $0<\langle y_0,y_0\rangle\leqslant\langle y_0,y(x_0)\rangle$,于是

$$\begin{aligned}\langle y_0,m(F(x))\rangle&=\langle y_0,y(x_0))\rangle+\langle y_0,m(F(x))-y(x_0)\rangle\\&\geqslant\langle y_0,y(x_0))\rangle-\varepsilon\\&\geqslant\langle y_0,y_0\rangle-\varepsilon,\end{aligned}$$

就是

$$\langle y_0,m(F(x))-y_0\rangle\geqslant-\varepsilon。$$

根据本节练习 1,式(2.2.1)蕴含 $\|m(F(x))\|\leqslant\|y_0\|+\frac{\varepsilon}{\|y_0\|}$,那么

$$\begin{aligned}&\langle m(F(x))-y_0,m(F(x))-y_0\rangle\\&=\langle m(F(x)),m(F(x))-y_0\rangle-\langle y_0,m(F(x))-y_0\rangle\\&=\langle m(F(x),m(F(x))\rangle-\langle m(F(x)),y_0\rangle-\langle y_0,m(F(x))-y_0\rangle\\&=\|m(F(x))\|^2-\langle m(F(x)-y_0+y_0,y_0\rangle-\langle y_0,m(F(x))-y_0\rangle\\&=\|m(F(x))\|^2-\|y_0\|^2-2\langle y_0,m(F(x))-y_0\rangle,\end{aligned}$$

而 $\|m(F(x))\|^2\leqslant\left(\|y_0\|+\frac{\varepsilon}{\|y_0\|}\right)^2=\|y_0\|^2+2\varepsilon+\left(\frac{\varepsilon}{\|y_0\|}\right)^2$,所以

$$\|m(F(x))-y_0\|^2\leqslant4\varepsilon+\left(\frac{\varepsilon}{\|y_0\|}\right)^2。$$

就是 $f(x)=m(F(x))$在 $y_0=m(F(x_0))$连续。 □

推论 2.2.1 设集合值映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是连续的和具有凸闭值,那么对于任意的 $a\in\mathbb{R}^n$,$f(x)=\pi(a,F(x))$是一个连续选择。

证明:设 $\bar{x}=x-a$,则 $\pi(a,F(x))=\pi(0,F(\bar{x}+a))=\pi(0,\bar{F}(\bar{x}))=m(\bar{F}(\bar{x}))$,容易看出 $\bar{F}$是连续的和凸闭值的,因此 $\bar{f}(\bar{x})=m(\bar{F}(\bar{x}))$是连续选择。于是 $f(x)=\bar{f}(x-a)$是连续的。 □

注 回忆证明定理 2.2.1 的过程,在证明 $y_0=0\in\mathbb{R}^m$时,应用了下半连续;当 $y_0\neq0$,应用了上半连续。也就是说,如果存在 $a\in\mathbb{R}^m$,$a\notin F(x)$,对一切 $x\in\mathbb{R}^n$,那么只要 $F(x)$是上半连续的就存在连续选择。 □

为了建立一般结论,我们先证明一个引理。

引理 2.2.1　设 A 是一个凸闭集，则 $x\mapsto\pi(x,A)$ 是 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的 Lipschitz 常数为 1 的 Lipschitz 映射。

证明：设 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$，根据第 1 章引理 1.2.2 后的注 2，有 $\langle\pi(x,A)-x_A,\pi(x,A)-x\rangle\leqslant 0$。分别用 x_1,x_2 代替上式中的 x，和用 $\pi(x_2,A),\pi(x_1,A)$ 代替 x_A，得到

$$\langle\pi(x_1,A)-\pi(x_2,A),\pi(x_1,A)-x_1\rangle\leqslant 0$$

和

$$\langle\pi(x_2,A)-\pi(x_1,A),\pi(x_2,A)-x_2\rangle\leqslant 0。$$

将第二式改写成 $\langle\pi(x_1,A)-\pi(x_2,A),x_2-\pi(x_2,A)\rangle\leqslant 0$，然后与第一式相加，得到

$$\langle\pi(x_1,A)-\pi(x_2,A),\pi(x_1,A)-x_1+x_2-\pi(x_2,A)\rangle\leqslant 0,$$

就是

$$\begin{aligned}\|\pi(x_1,A)-\pi(x_2,A)\|^2&\leqslant\langle x_1-x_2,\pi(x_1,A)-\pi(x_2,A)\rangle\\&\leqslant\|x_1-x_2\|\,\|\pi(x_1,A)-\pi(x_2,A)\|,\end{aligned}$$

当 $\pi(x_1,A)\neq\pi(x_2,A)$ 时，两边同除以 $\|\pi(x_1,A)-\pi(x_2,A)\|$，得

$$\|\pi(x_1,A)-\pi(x_2,A)\|\leqslant\|x_1-x_2\|。\tag{2.2.2}$$

而式(2.2.2)当 $\pi(x_1,A)=\pi(x_2,A)$ 时也成立。结论获证。 □

定理 2.2.2　设集合值映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是连续的和具有凸闭值，$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续的单值映射，那么 $f(x)=\pi(g(x),F(x))$ 是 F 的一个连续选择。

证明：考察

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=\pi(g(x_1),F(x_1))-\pi(g(x_2),F(x_2))\\&=\pi(g(x_1),F(x_1))-\pi(g(x_1),F(x_2))+\\&\quad\pi(g(x_1),F(x_2))-\pi(g(x_2),F(x_2))。\end{aligned}$$

如果当 $x_1-x_2\to 0$ 时，

$$\pi(g(x_1),F(x_1))-\pi(g(x_1),F(x_2))\to 0,$$

$$\pi(g(x_1),F(x_2))-\pi(g(x_2),F(x_2))\to 0,$$

那么定理获证。第一个极限就是推论 2.2.1 的结论，而第二个极限就是引理 2.2.1。 □

通常将定理 2.2.1 给出的选择称为**最小选择**，因为选取的对象是集合中范数最小的元。最小选择是连续的，但是未必是 Lipschitz 的。有兴趣的读者可以参阅[9]中给出的例子。

2.2.2　Michael 选择定理

集合值映射选择问题中最著名的结果是 Michael 选择定理。注意到在证明最小选择的时候，我们用到了内积，因此要求 F 的像空间是内积空间。在本小节给出的 Michael 选择定理中，F 的像空间只要求是完备的线性赋范空间。先要证明一个所谓 1 的分解的结论。

1) 1 的分解

将 1 分解成一些非负函数之和称为 1 的分解，在泛函分析里存在 1 的各种各样的分解，这

里需要用 1 的 Lipschitz 分解。

设 X 是一个线性赋范空间，$A\subset X$ 为一个集合，$\{\Omega_i;i\in I\}$ 是 A 的一个开覆盖③。一个开覆盖称为是**局部有限开覆盖**，如果对任意一个 $\Omega_{i_0}\in\{\Omega_i;i\in I\}$，只有有限多个 $\Omega_{j_0}\in\{\Omega_i;i\in I\}$，使得 $\Omega_{i_0}\cap\Omega_{j_0}\neq\varnothing$。$\{p_i(x);i\in I\}$ 称为是 A 上关于开覆盖 $\{\Omega_i;i\in I\}$ 的一个 **1 的分解**，如果 $\{p_i(x);i\in I\}$ 满足

(1) $p_i(x)>0,x\in\Omega_i;p_i(x)=0,x\notin\Omega_i$。

(2) 对任意的 $x\in A$，$\sum\limits_{i\in I}p_i(x)=1$。

如果 $p_i(x),i\in I$ 都是连续的，则称 $\{p_i(x);i\in I\}$ 是一个 1 的连续分解，如果 $p_i(x),i\in I$ 都是 Lipschitz 的，则称它是一个 1 的 Lipschitz 分解。当开覆盖确定之后，常常略去开覆盖 $\{\Omega_i;i\in I\}$ 而仅称 $\{p_i(x);i\in I\}$ 称为是 A 上的一个 1 的分解。

引理 2.2.2 设 $A\subset\mathbb{R}^n$，$\{\Omega_i;i\in I\}$ 是 A 的一个非平凡的局部有限开覆盖，则存在一个 A 上关于开覆盖 $\{\Omega_i;i\in I\}$ 的一个 1 的 Lipschitz 分解。

证明：对每个 $i\in I$，定义函数 $q_i(x):A\to\mathbb{R}(\geqslant 0)$ 为 $q_i(x)=d(x,A\backslash\Omega_i)$，其中 d 表示距离。首先 $q_i(x)$ 是 Lipschitz 的，其 Lipschitz 常数为 1(参见本节练习 2)，又因为 Ω_i 为开集，所以 $q_i(x)=0,x\notin\Omega_i;q_i(x)>0,x\in\Omega_i$。再定义

$$p_i(x)=\frac{q_i(x)}{\sum\limits_{j\in I}q_j(x)}。$$

已知 $\{\Omega_i;i\in I\}$ 是开覆盖，因此对每一个 $x\in A$，存在 $i_0\in I$，使得 $x\in\Omega_{i_0}$，因此 $q_{i_0}(x)>0$，进一步 $\sum\limits_{j\in I}q_j(x)>0$，$p_i(x)$ 是合理定义的和连续的。根据定义容易证明 $p_i(x)$ 满足关于 1 的分解的两项要求。现在证明 $p_i(x)$ 满足 Lipschitz 条件。

对固定的 $x_0\in A$，存在 $i_0\in I$，使得 $x_0\in\Omega_{i_0}$，由于 Ω_{i_0} 是开集，故而存在 $\varepsilon>0$，使得 $B(x_0,\varepsilon)\subset\Omega_{j_0}$。因为开覆盖是局部有限的，因此至多只有有限个开集 Ω_i，使得 $B(x_0,\varepsilon)\cap\Omega_i\neq\varnothing$，记这样开集个数为 N；由此当 $x\in B(x_0,\varepsilon)$ 时，在和式 $\sum\limits_{j\in I}q_j(x)$ 中只有 N 个 $q_j(x)\neq 0$，因此在紧集 $\mathrm{cl}B(x_0,\varepsilon)$ 上，$\sum\limits_{j\in I}q_j(x)$ 有界，即存在 $0<m<M$，使得 $m\leqslant\sum\limits_{j\in I}q_j(x)\leqslant M$。最后，当 $x_1,x_2\in B(x_0,\varepsilon)$ 时，

$$\begin{aligned}
&|p_i(x_1)-p_i(x_2)|\\
&=\left|\frac{q_i(x_1)}{\sum\limits_{j\in I}q_j(x_1)}-\frac{q_i(x_2)}{\sum\limits_{j\in I}q_j(x_2)}\right|\\
&=\left|\frac{q_i(x_1)\sum\limits_{j\in I}q_j(x_2)-q_i(x_2)\sum\limits_{j\in I}q_j(x_1)}{\sum\limits_{j\in I}q_j(x_1)\sum\limits_{j\in I}q_j(x_2)}\right|
\end{aligned}$$

③ 如果存在 $\Omega_{i_0},i_0\in I$，使得 $\Omega_{i_0}\supset A$，那么称这个开覆盖是平凡的，通常不讨论这种平凡的情形。

$$\leqslant\frac{1}{m^2}\sum_{j\in I}\mid q_i(x_1)q_j(x_2)-q_i(x_2)q_j(x_1)\mid$$

$$\leqslant\frac{1}{m^2}\sum_{j\in I}(\mid q_i(x_1)q_j(x_2)-q_i(x_1)q_j(x_1)\mid+\mid q_i(x_1)q_j(x_1)-q_i(x_2)q_j(x_1)\mid)$$

$$\leqslant\frac{1}{m^2}\sum_{j\in I}(\mid q_i(x_1)\mid\mid q_j(x_2)-q_j(x_1)\mid+\mid q_j(x_1)\mid\mid q_i(x_1)-q_i(x_2)\mid)$$

$$\leqslant\frac{1}{m^2}(\sum_{j\in I}\mid q_j(x_2)-q_j(x_1)\mid+\mid q_i(x_1)-q_i(x_2)\mid\sum_{j\in I}\mid q_j(x_1)\mid)$$

$$\leqslant\frac{1}{m^2}(N+MN)\mid x_2-x_1\mid。$$

结论获证。　□

2) Michael 选择定理

证明 Micheal 选择定理需要下列引理。

引理 2.2.3　设 X,Y 是两个线性赋范空间。$\varphi:X\to Y$ 是连续的单值映射，$\varepsilon:X\to\mathbb{R}\ (>0)$ 是连续函数，$G:X\to Y$ 是下半连续的集合值映射，那么

$$F(x)=B(\varphi(x),\varepsilon(x))\cap G(x)$$

是下半连续的。　□

引理 2.2.3 的证明是标准的应用 ε-δ 语言的练习。我们将它留给读者。

我们还需要叙述一个事实：度量空间是仿紧的。这个结论是 A. H. Stone 在 1948 年证明的。本书不予证明，读者可以参见《拓扑空间论》(高国士著，科学出版社 2000，p. 119-121)。这里要用的事实是所谓仿紧。一个集合称为是仿紧的，如果它的一个开覆盖总有加细的局部有限的覆盖。这是说：设 A 是一个集合，$\{U_\alpha\}$ 是 A 上一个开覆盖，如果存在另一个开覆盖 $\{V_\beta\}$，$\{V_\beta\}$ 是局部有限的，而且对于每个 $V_\beta\in\{V_\beta\}$，存在 $U_\alpha\in\{U_\alpha\}$，使得 $V_\beta\subset U_\alpha$。

定理 2.2.3(Micheal 选择定理)　设 X,Y 是两个线性赋范空间，Y 是完备的。$F:X\to Y$ 是具有凸闭值的集合值映射，而且是下半连续的，则存在连续选择。

证明：证明分成三步。

(1) 对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个单值映射 φ_ε，使得 $d(\varphi_\varepsilon(x),F(x))<\varepsilon$。

由于 $F:X\to Y$ 是下半连续的，任取 $x\in X$ 和 $y_x\in F(x)$，对任意给定的 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$，使得当 $\bar{x}\in B(x,\delta)$ 时，$F(\bar{x})\cap B(y_x,\varepsilon)\neq\varnothing$。于是 $\{B(x,\delta),x\in X\}$ 构成 X 的开覆盖，因此存在加细的局部有限开覆盖 $\{U_i\}$。对于开覆盖 $\{U_i\}$ 存在 1 的分解 $p_i(x)$。因为 $\{U_i\}$ 是 $\{B(x,\delta),x\in X\}$ 的加细，因此对每个 U_i 存在 $B(x_i,\delta)$，使得 $U_i\subset B(x_i,\delta)$。构造

$$\varphi_\varepsilon(x)=\sum_{i\in I}p_i(x)y_{x_i}。$$

$\varphi_\varepsilon(x)$ 是局部 Lipschitz 连续的。于是对任意 $x\in X$，存在 U_i(未必唯一)，使得 $x\in U_i\subset B(x_i,\delta)$，$F(x)\cap B(y_{x_i},\varepsilon)\neq\varnothing$，就是 $y_{x_i}\in F(x)+\varepsilon B_m$。而 $F(x)$ 是凸的，所以 $\varphi_\varepsilon(x)=\sum_{i\in I}p_i(x)y_{x_i}\in F(x)+\varepsilon B_m$，就是 $d(\varphi_\varepsilon(x),F(x))<\varepsilon$。

注意在上述过程中，我们没有应用 $F(x)$ 是闭值这个条件。只需要 $F(x)$ 是凸的和下半连

续的，就可以有一个在每个 x 和 $F(x)$ 距离小于 ε 的 Lipschitz 连续单值映射。

(2) 构造单值映射序列 $\{f_n(x)\}$。

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，应用 1 给出的方法构造出 $\varphi_{\frac{1}{2}}(x)$，记 $f_1(x)=\varphi_{\frac{1}{2}}(x)$，则 $f_1(x)$ 是连续的。考虑集合值映射 $F_1(x)=B\left(f_1(x),\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cap F(x)$，根据引理 2.2.2，$F_1(x)$ 是下半连续的。再取 $\varepsilon=\frac{1}{4}$，重复(1)中的方法，存在 $f_2(x)$，$f_2(x)$ 连续，并且 $d(f_2(x),F_1(x))<\frac{1}{4}$。根据定义 $F_1(x)\subset F(x)$，所以 $d(f_2(x),F(x))\leqslant d(f_2(x),F_1(x))<\frac{1}{4}$；又 $f_2(x)\in F_1(x)+\frac{1}{4}B_m$，所以 $\|f_1(x)-f_2(x)\|\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$。

一般地，在第 n 步构造了 $f_n(x)$，使得 $d(f_n(x),F_1(x))<\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$\|f_n(x)-f_{n-1}(x)\|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$。取 $\varepsilon=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，考虑集合值映射 $F_n(x)=B(f_n(x),\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1})\cap F(x)$，则由引理 2.2.2，$F_n(x)$ 下半连续，则存在 $f_{n+1}(x)$，$f_{n+1}(x)$ 连续，而且 $d(f_{n+1}(x),F_n(x))<\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，$F_n(x)\subset F(x)$，所以 $d(f_{n+1}(x),F(x))\leqslant d(f_{n+1}(x),F_n(x))<\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$；又 $f_{n+1}(x)\in F_n(x)+\left(\frac{1}{2}\right)^nB_m$，所以 $\|f_{n+1}(x)-f_n(x)\|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$。考虑

$$\begin{aligned}\|f_{n+k}(x)-f_n(x)\|&\leqslant\|f_{n+k}(x)-f_{n+k-1}(x)\|+\cdots+\|f_{n+1}(x)-f_n(x)\|\\&<\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^n。\end{aligned}$$

$\{f_n(x)\}$ 为连续函数空间的 Cauchy 序列。

(3) 构造单值映射序列 $f(x)$。

记 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，则 $f(x)$ 连续。又因 Y 是完备的，$F(x)$ 是闭集，所以 $f(x)\in F(x)$。 □

2.2.3 Lipschitz 逼近

对于单值映射来说，连续不一定导致 Lipschitz 连续，但是 Lipschitz 连续必定连续；然而，对于集合值映射来说，Lipschitz 映射未必是连续映射，本小节要证明一个上半连续的集合值映射总可以用 Lipschitz 的集合值映射来逼近。

定理 2.2.4 设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是上半连续的集合值映射，并且具有凸闭值和有界的，则存在集合值映射 $F_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$k=1,2,\cdots$，满足：

(1) $F_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$k=1,2,\cdots$ 是 Lipschitz 的，具有凸闭值和有界的；

(2) $F(x)\subset\cdots\subset F_{k+1}(x)\subset F_k(x)\subset\cdots\subset F_1(x)\subset F_0(x)$；

(3) 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $K=K(x,\varepsilon)$，当 $k>K$ 时，$F_k(x)\subset F(x)+\varepsilon B_m$。

证明：取 $e_i=[0\ \cdots\ \underset{i}{1}\ \cdots\ 0]$是第 i 个分量为 1，其余都是 0 的单位向量，则 $e_i, i=1, 2, \cdots, n$ 组成$\mathbb{R}^n$的一组标准正交基。用$\mathbb{Z}^n$表示所有分量都是整数的 n 维向量组成的集合(即$\mathbb{R}^n$的全体整数格点)。证明分成如下几步进行。

(1) 构造 $F_k(x)$。取 $\rho_0=1$，定义$\mathbb{Z}_0^n=\rho_0\mathbb{Z}^n=\mathbb{Z}^n$。用 z_0 表示$\mathbb{Z}_0^n$中的元素。另外定义集合为

$$C_0=\{x; x=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n, a_i\in(-\rho_0,\rho_0)\},$$

它是以原点为中心、棱长为 $2\rho_0$ 的开的方体，自然是凸集。$\mathbb{Z}_0^n+C_0$ 组成$\mathbb{R}^n$的一个局部有限开覆盖。对应于这个开覆盖有 1 的分解 $p_{z_0}(x), z_0\in\mathbb{Z}_0^n$。对每个 $z_0\in\mathbb{Z}_0^n$，定义集合 $O_{z_0}=\mathrm{clco}F(z_0+2C_0)$和集合值映射 $F_0(x)$如下：

$$F_0(x)=\sum_{z_0\in Z_0^n}p_{z_0}(x)O_{z_0},$$

因为 $p_{z_0}(x)$是局部 Lipschitz 的，所以 $F_0(x)$是 Lipschitz 的和凸闭值的。如果 $F(x)\subset bB_m$，那么 $O_{z_0}\subset bB_m$，而 $0\leqslant p_{z_0}(x)\leqslant 1$，所以 $F_0(x)\subset bB_m$。

现在构造 $F_1(x)$。定义 $\rho_1=\dfrac{1}{3}\rho_0$ 和$\mathbb{Z}_1^n=\rho_1\mathbb{Z}_0^n$，$\mathbb{Z}_1^n$中的元素是 $z_1=\rho_1z_0$。定义

$$C_1=\left\{x; x=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n, a_i\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\},$$

$\mathbb{Z}_1^n+C_1$ 组成$\mathbb{R}^n$的一个局部有限开覆盖。对应于这个开覆盖有 1 的分解 $p_{z_1}(x), z_1\in\mathbb{Z}_1^n$。对每个 $z_1\in\mathbb{Z}_1^n$，定义集合 $O_{z_1}=\mathrm{clco}F(z_1+2C_1)$和集合值映射 $F_1(x)$如下：

$$F_1(x)=\sum_{z_1\in Z_1^n}p_{z_1}(x)O_{z_1},$$

$F_1(x)$是 Lipschitz 和凸闭值的。一般地，定义 $\rho_{k+1}=\dfrac{1}{3}\rho_k$ 可以定义集合值映射 $F_{k+1}(x)$。

(2) $F(x)\subset F_{k+1}(x)\subset F_k(x)$。如果能够证明 $F(x)\subset F_1(x)\subset F_0(x)$，那么类似地可以证明 $F_{k+1}(x)\subset F_k(x)$。

固定 $x\in\mathbb{R}^n$，那么只有有限多个 $z_{0_i}\in\mathbb{Z}_0^n$，使得 $x\in z_{0_i}+C_0$，就此定义集合

$$Z_0(x)=\{z_{0_i}; z_{0_i}\in\mathbb{Z}_0^n, x\in z_{0_i}+C_0\};$$

类似地，那么只有有限多个 $z_{1_i}\in\mathbb{Z}_1^n$，使得 $x\in z_{1_i}+C_1$，就此定义集合

$$Z_1(x)=\{z_{1_i}; z_{1_i}\in\mathbb{Z}_1^n, x\in z_{1_i}+C_1\}。$$

对于每个 $z_{1_i}\in\mathbb{Z}_1^n$和每个 $z_{0_i}\in\mathbb{Z}_0^n$都成立 $z_{1_i}+C_1\subset z_{0_i}+C_0$(见图 2.6)，自然成立 $z_{1_i}+2C_1\subset z_{0_i}+2C_0$，这样 $O_{z_1}\subset O_{z_0}$对任意 $z_{1_i}\in\mathbb{Z}_1^n$和 $z_{0_i}\in\mathbb{Z}_0^n$都成立。由于 O_{z_1}是凸集，因此

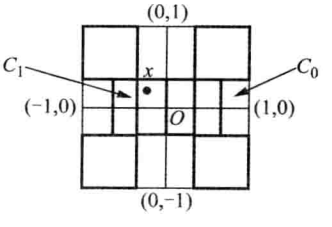


图 2.6　C_0 和 C_1 的关系示意图

$$O_{z_1} = \sum_{z_0 \in Z_0(x)} p_{z_0}(x) O_{z_1} \subset \sum_{z_0 \in Z_0(x)} p_{z_0}(x) O_{z_0}。$$

进一步

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_{z_1 \in Z_1^n} p_{z_1}(x) O_{z_1} \\ &= \sum_{z_1 \in Z_1(x)} p_{z_1}(x) O_{z_1} \\ &\subset \sum_{z_1 \in Z_1(x)} p_{z_1}(x) \sum_{z_0 \in Z_0(x)} p_{z_0}(x) O_{z_0} \\ &= \sum_{z_1 \in Z_1(x)} p_{z_1}(x) \sum_{z_0 \in Z_0^n} p_{z_0}(x) O_{z_0} \\ &= \sum_{z_1 \in Z_1(x)} p_{z_1}(x) F_0(x) \\ &= F_0(x)。 \end{aligned}$$

而当 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $z_{1_i} \in Z_1(x)$ 时，$x \in z_{1_i} + C_1$，$F(x) \subset O_{z_1}$。

$$F(x) \subset \sum_{z_1 \in Z_1(x)} p_{z_1}(x) O_{z_1} = \sum_{z_1 \in Z_1^n} p_{z_1}(x) O_{z_1} = F_1(x)。$$

(3) 收敛性。由于 $F(x)$ 是上半连续的，因此确定的 $x \in \mathbb{R}^n$ 和任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(x, \varepsilon)$，当 $y \in B(x, \delta)$ 时，$F(y) \subset F(x) + \varepsilon B_m$。对这个 x 和 ε，存在 K，当 $k > K$ 时，$z_{k_i} \in Z_k(x)$，$z_{k_i} + C_k \subset B(x, \varepsilon)$，那么 $O_{z_k} \subset F(x) + \varepsilon B_m$，而 $F(x) + \varepsilon B_m$ 是凸集，因此

$$F_k(x) = \sum_{z_{k_i} \in Z_k(x)} p_{z_k}(x) O_{z_k} \subset F(x) + \varepsilon B_m。$$

定理证毕。 □

我们在本节练习 8 中指出只要定理 2.2.4 的条件满足，那么存在连续的单值映射 f_ε：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，使得 $f_\varepsilon(x) \in F(x) + \varepsilon B$，对任意的 $\varepsilon > 0$ 成立。于是产生一个新的定义。

定义 2.2.2 设 $F: X \to Y$ 是集合值映射，X, Y 是两个度量空间。如果对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $f_\varepsilon: X \to Y$，使得 $\mathrm{gra} f_\varepsilon \subset \mathrm{gra} F + \varepsilon B$，那么称 F 存在近似选择。 □

显然 $f_\varepsilon(x) \in F(x) + \varepsilon B$ 是近似选择的充分条件。定理 2.2.4 说明，只要 F 是上半连续的，有界和闭凸值的，那么 F 存在近似选择。下面的定理略微放松了条件。

一个映射 $\varphi: X \to Y$ 称为**局部紧映射**，如果存在紧集 $K \subset Y$，使得对任意 $x \in X$，存在 x 的一个领域 $B(x, \delta)$，满足 $\varphi(B(x, \delta)) \subset K$。

定理 2.2.5 考虑集合值映射 $F: X \to Y$，X 是度量空间，Y 是 Banach 空间，如果 F 是上半连续的和闭凸值，并且 $\mathrm{gra} F$ 是凸的，那么 F 存在 Lipschitz 的近似选择。

进一步如果 $x \mapsto m(F(x))$ 是局部紧的，那么对任意 $\varepsilon > 0$，对任意的 $x \in X$，存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\delta = \delta(x)$，当 $\varepsilon < \varepsilon_0$ 时，$f_\varepsilon(B(x, \delta)) \subset K$。

在定理 2.2.5 的叙述中，由于使得 $f_\varepsilon(B(x, \delta)) \subset K$ 的 δ 不依赖于 ε，因此也称近似选择 f_ε 为等度局部紧的。

定理 2.2.5 的证明：任意给定 $\varepsilon>0$，由于 F 是上半连续的，对任意 $x_0\in X$，存在 $\delta_1=\delta_1(x_0,\varepsilon)$，使得当 $x\in B(x_0,\delta_1)$ 时，$F(x)\subset F(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}B$。取 $\delta(x_0)=\min\left(\frac{\varepsilon}{2},\delta_1\right)$，对每个 x_0 做邻域 $B\left(x_0,\frac{\delta(x_0)}{2}\right)$，则得到 X 的一个开覆盖。X 是度量空间，从而存在加细的局部有限子覆盖 $\{U_i\}$。$p_i(x)$ 是 $\{U_i\}$ 的 Lipschitz 单位分解。由于 $\{U_i\}$ 是 $B\left(x_0,\frac{\delta(x_0)}{2}\right)$ 的加细，对每个 U_i 可以固定一个 x_i，使得 $U_i\subset B\left(x_i,\frac{\delta(x_i)}{2}\right)$。构造 f_ε 如下：

$$f_\varepsilon(x)=\sum_i p_i(x)m(F(x_i))。\tag{2.2.3}$$

下面讨论 f_ε 的性质。首先，由于 $p_i(x)$ 是 Lipschitz 的，而 $m(F(x_i))$ 是局部紧的，因此 f_ε 是 Lipschitz 的。第二，由于 graF 是凸集，$(x_i,m(F(x_i)))\in \mathrm{graF}$ 蕴含 $(x,f_\varepsilon(x))\in \mathrm{graF}$。最后证明存在 $x_j\in X$，使得 $f_\varepsilon(x)\in F(x_j)+\frac{\varepsilon}{2}B$。

由于 $\{U_i\}$ 是局部有限的开覆盖，因此对每个 x，在和式 $\sum_i p_i(x)m(F(x_i))$ 中只有有限项非零。记这些非零项的指标组成的集合为 $I(x)$ 和 $\delta_{i_0}=\max\{\delta_i=\delta(x_i),i\in I(x)\}$，那么对任意的 $x_i,i\in I(x)$，$\|x-x_i\|<\frac{\delta(x_i)}{2}\leqslant\frac{\delta(x_{i_0})}{2}$，从而 $\|x_{i_0}-x_i\|\leqslant\|x_{i_0}-x\|+\|x-x_i\|<\delta(x_{i_0})$，即得

$$m(F(x_i))\in F(x_i)\subset F(x_{i_0})+\frac{\varepsilon}{2}B。$$

图 2.7 用来说明 x 和 U_i,x_i,δ_i 等变量之间的关系。由于 $\{U_i\}$ 是局部有限的开覆盖，设 x 属于 U_1,U_2,U_3，它们分别包含在 $B\left(x_i,\frac{\delta_i}{2}\right),i=1,2,3$ 中，δ_2 最大，从而 $x,x_i,i=1,2,3$ 都在 $B(x_2,\delta_2)$ 中。

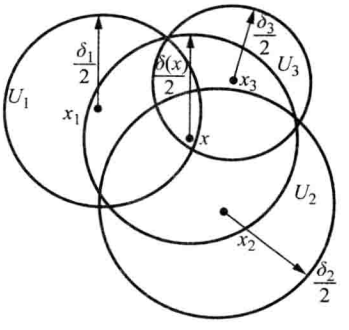


图 2.7　定理 2.2.5 证明中的 x 和 U_i

进一步，因为 $F(x_{i_0})$ 是凸集，所以

$$f_\varepsilon(x)=\sum_i p_i(x)m(F(x_i))\in F(x_{i_0})+\frac{\varepsilon}{2}B。$$

存在 $y_{i_0}\in F(x_{i_0})$，$\| f_\varepsilon(x)-y_{i_0}\|<\frac{\varepsilon}{2}$。于是

$$\begin{aligned} d((x,f_\varepsilon(x)),\mathrm{gra}F) &\leqslant \|(x,f_\varepsilon(x))-(x_{i_0},y_{i_0})\| \\ &\leqslant \|x-x_{i_0}\|+\|f_\varepsilon(x)-y_{i_0}\| \\ &<\varepsilon。 \end{aligned}$$

现在证明等度局部紧。设单值映射 $m:x\mapsto m(F(x))$ 是局部紧的，就是存在 Y 中的紧集 K，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(x,\varepsilon)$，$\delta_m=\min\left\{\delta,\frac{\varepsilon}{2}\right\}$，$m(F(B(x,\delta_m)))\subset K$。现在考虑 f_ε，对给定 x，令 $\delta_f=\frac{1}{2}\delta_M=\frac{1}{2}\max\{\delta_{m_i},i\in I(x)\}$，则 $m(F(B(x_{i_0},2\delta_f)))\subset K$，而 $x_i\in B(x_{i_0},2\delta_f)$，$m(F(x_i))\in K$。又由于 $x\in\bigcap\limits_{i\in I(x)}U_i$，所以 $\bigcap\limits_{i\in I(x)}U_i$ 是一个非空开集，当 $\bar{x}\in\bigcap\limits_{i\in I(x)}U_i$ 时，式(2.2.3)右面的 $m(F(x_i))$ 是不变的，而 K 是凸的，所以 $f_\varepsilon(\bar{x})\in K$。 □

2.2.4 不动点定理

定义 2.2.3 设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是集合值映射，如果存在集合值映射 $F_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$k=1,2,\cdots$，满足：

(1) 对所有的 k，$\mathrm{gra}F_k$ 是闭集，且 F_k 存在连续选择。

(2) 对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$，$F_{k+1}(x)\subset F_k(x)$，且 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k(x)=F(x)$。

则称 F 是 **σ-可选择**的。 □

根据定理 2.2.4，一个上半连续的集合值映射 F，如果它是凸闭值和有界的，那么它是 σ-可选择的。

不动点理论在拓扑学中是一项重要的研究内容，在微分方程理论中，用它来证明解的存在和唯一性。在本节最后部分，我们介绍集合值映射的不动点定理。

定义 2.2.4 设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是集合值映射，$x\in\mathbb{R}^n$ 称为是 F 的不动点，如果 $x\in F(x)$。 □

我们首先叙述著名的 **Brouwer 不动点定理**。

定理 2.2.6 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是凸紧集，$f:A\to A$ 是一个连续(单值)映射，那么必定存在 $x\in A$，使得 $f(x)=x$。 □

这个结论后来由 Schauder 推广到一般的线性赋范空间。定理的证明都比较复杂，读者可以参考拓扑学或者泛函分析的教材。

定理 2.2.7 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是凸紧集，$F:A\to A$ 是一个 σ-可选择集合值映射，那么必定存在 $x\in A$，使得 $x\in F(x)$。

证明：设 F_k 是 F 的一个 σ-可选序列，$f_k(x)$ 是 $F_k(x)$ 的一个连续选择。考虑 $A\to A$ 的连续映射 $x\mapsto\pi(f_k(x),A)$。由定理 2.2.6，存在不动点 $x_k\in A$，使得 $x_k=\pi(f_k(x_k),A)$，或者写成 $\|f_k(x_k)-x_k\|=d(f_k(x_k),A)$。

由于 $F_k \downarrow F$，所以当 $m \leqslant k$ 时，$f_k(x_k) \in F_k(x_k) \subset F_m(x_k)$ 和

$$d(x_k, F_m(x_k)) \leqslant d(x_k, F_k(x_k)) \leqslant \| f_k(x_k) - x_k \| = d(f_k(x_k), A)。$$

因为 $\{x_k\} \subset A$，A 是紧集，所以存在 $\bar{x} \in A$，$\bar{x}$ 是 $\{x_k\}$ 的聚点。不妨假设就是 $x_k \to \bar{x}$。根据上一节练习 5，$F_k, k=1,2,\cdots$ 是上半连续的，因此对任意的 $\varepsilon>0$，当 m 足够大时，$F_m(x_k) \subset F_m(\bar{x}) + \varepsilon B_n$。因此

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, F_m(\bar{x})) &\leqslant \| \bar{x} - x_k \| + d(x_k, F_m(x_k)) + \varepsilon \\ &\leqslant \| \bar{x} - x_k \| + d(f_k(x_k), A) + \varepsilon。 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

而 F_m 单调递减地收敛到 F，所以当 m 足够大时 $F_m(\bar{x}) \subset F(\bar{x}) + \varepsilon B_n$。于是

$$f_k(x_k) \in F_k(x_k) \subset F_m(x_k) \subset F_m(\bar{x}) + \varepsilon B_n \subset F(\bar{x}) + 2\varepsilon B_n \subset A + 2\varepsilon B_n,$$

这说明 $d(f_k(x_k), A) \leqslant 2\varepsilon$，代入式(2.2.4)，得到 $d(\bar{x}, F_m(\bar{x})) \leqslant 4\varepsilon$，其中利用了当 k 充分大时，$\| x_k - \bar{x} \| < \varepsilon$。再次利用 $F_m(\bar{x}) \subset F(\bar{x}) + \varepsilon B_n$，$d(\bar{x}, F(\bar{x})) \leqslant 5\varepsilon$。因为 ε 是任意的，所以 $\bar{x} \in F(\bar{x})$。 □

注　定理 2.2.7 的叙述和证明中，说 F 在 A 上是 σ-可选的，只是说 F 在 A 上的限制具有 σ-可选的性质。当 $x \in A$ 时，那些 F_k 满足 $F(x) \subset \cdots F_{k+1}(x) \subset F_k(x) \cdots \subset F_1(x)$，但不能断定 $F_k(x) \subset A$。 □

应用定理 2.2.4，定理 2.2.7 的直接推论称为 **Kakutani 不动点定理**。

定理 2.2.8　设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是凸紧集，$F: A \to A$ 是一个上半连续集合值映射，而且 F 是凸闭值的，那么 F 在 A 上存在不动点。 □

练习

1. 如果 $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$，$A_1 \subset A_2 + \varepsilon B$，那么对于任意的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，$d(x_0, A_1) \leqslant d(x_0, A_2) + \varepsilon$。
2. 如果 $A \subset X$，X 是线性赋范空间，则 $d(x, A)$ 是 $X \to R$ 的 Lipschitz 映射，且 Lipschitz 常数为 1。
3. 如果集合值映射 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是闭凸值的和 Lipschitz 的，$F(x)$ 是有界的，那么 F 是 ε-连续的。
4. 证明引理 2.2.2。
5. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是凸紧集，x_0 是 A 的内点，如果单值的连续映射 $f: A \to \mathbb{R}^n$，如果对一切 A 的边界上的点 x，成立 $\| f(x) - x \| \leqslant \| x_0 - x \|$，那么 $x_0 \in f(A)$。（提示：应用 Brouwer 定理和 Minkowski 函数。）
6. 证明定理 2.2.4 在 $F: X \to Y$，X 是度量空间，Y 是 Banach 空间时也成立。
7. 举例说明 $f_\varepsilon(x) \in F(x) + \varepsilon B$ 不是近似选择的必要条件。
8. 证明在定理 2.2.4 的条件下，对任意的成立 $\varepsilon>0$，存在连续的单值映射 $f_\varepsilon: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，使得 $f_\varepsilon(x) \in F(x) + \varepsilon B$。（提示：只要证明定理 2.2.4 中的集合值映射 F_k 是下半连续的。）

2.3 微分包含及其解的存在性

设 $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个已知的单值映射，$T\in\mathbb{R}\ (>0)$，$t\in[0,T]$ 称为时间，$x(t)$ 是 $[0,T]\to\mathbb{R}^n$ 的未知单值函数，$\dot{x}(t)$ 表示 $x(t)$ 关于 t 的导数，要求从

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t))$$

中解出 $x(t)$ 称为微分方程问题。如果还指定初始条件，即要求 $x(t_0)=x_0$，则称为微分方程的 Cauchy 问题。如果 f 是 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的单值映射，那么微分方程成为 $\dot{x}(t)=f(x(t))$。这样的微分方程右端不显含时间变量 t，就称为时不变的，相应地，前面的方程称为时变的。

微分方程研究分成两部分：解的求取和解的性质。主要课题有求解微分方程的各种方法，Cauchy 问题解的存在性和唯一性，解对初值的依赖性，解的稳定性等等。其中，求解微分方程是一个至今没有很好解决的难题，哪怕是不算复杂的非线性方程，我们都没有把握能求取它的解析解。

如果 $F:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个已知的集合值映射，$x(t)$ 仍然是 $[0,T]\to\mathbb{R}^n$ 的未知函数，要求从

$$\dot{x}(t)\in F(t,x(t)),$$

中解出 $x(t)$ 称为**微分包含**问题。如果还要求 $x(0)=x_0$，则称为**微分包含的 Cauchy 问题**。如果集合值映射 F 只是 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，不显含 t，则微分包含成为

$$\dot{x}(t)\in F(x(t))。\tag{2.3.1}$$

相应地，式(2.3.1)称为时不变的微分包含，前者则称为时变的微分包含。本书主要研究微分包含(2.3.1)的 Cauchy 问题。

用 $x(t;[0,T],x_0)$ 表示式(2.3.1)存在于时间区间 $[0,T]$ 上，初始值为 x_0 的一个解。在意义明确的时候 $x(t;[0,T],x_0)$ 就简单地记成 $x(t)$。通常要求 $x(t;[0,T],x_0)$ 是一个绝对连续函数，它在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 空间中表现为始于 $(0,x_0)$ 的一条闭的几乎处处可微的曲线，该曲线称为轨线。和微分方程问题相似，这个解未必存在于整个时间域，因而 T 与具体的解 x 有关。当集合值映射 $F(x)$ 的值包含不止一个元素的时候，式(2.3.1)的解不大可能是唯一的。用 $S_{[0,T]}(F,x_0)$ 表示所有式(2.3.1)的所有存在于时间域 $[0,T]$ 上、初始值为 x_0 解的全体，即 $S_{[0,T]}(F,x_0)=\bigcup\limits_{x\in F(x)}x(t;[0,T],x_0)$。进一步用

$$S_{[0,T]}(F,C)=\bigcup_{x\in F(x)}\{x(t,[0,T],x_0),x_0\in C\}$$

表示所有存在于 $[0,T]$ 上、初始值在集合 $C\subset\mathbb{R}^n$ 的微分包含(2.3.1)解的全体。在可以模糊解存在的时间域的时候，我们会省略其下标 $[0,T]$。

例 2.3.1 考虑下列微分包含，

$$\dot{x}\in[0.1,0.3]x,\quad x(0)=1。$$

它的解充满图 2.8 中浅色阴影区域。然而并非这个阴影区域内的任意一条曲线都是微分包含的解。$S(F,1)$中的曲线有这样的特征：①曲线是几乎处处可导的；②起点在$(0,1)$；③在解上任意点 $A(t_1,x_1)$出发的轨线射出角度在 $0.1x$ 和 $0.3x$ 之间(图 2.8 中深色阴影区域)。因此总是单调递增的。 □

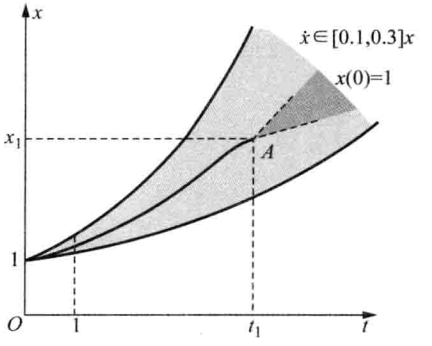


图 2.8　例 2.3.1 的解

一个可以想到的求解微分包含方案是：从 $F(x)$选择一个函数 $f(x)\in F(x)$，然后解微分方程的 Cauchy 问题：$\dot{x}(t)=f(x(t))$，$x(0)=x_0$，这样就可以得到微分包含的一个解。确实依照这条路线可以获得解的存在性证明，但是很难再有进一步的作为。从本章 2.2 节已经看到获得集合值映射的选择并非一件容易的事，而且即使得到了函数 $f(x)$，求解 Cauchy 问题依然困难，更进一步这种方法无法获得解集 $S(F,C)$，从而无法整体评价微分包含解的性质。

为了方便研究，本书的一个基本假定是：式(2.3.1)右端的集合值映射 $F(x)$是凸和闭值的。而对于微分包含的解，通常有下列要求：

(1) 由于求解微分包含问题的困难，也因为我们基本采用 Lebesgue 积分，因此仅要求在解存在的时间区间$[0,T]$内，式(2.3.1)对几乎所有的 $t\in[0,T]$成立就可以了，也就是说允许在$[0,T]$的一个零测度集合上式(2.3.1)不成立；

(2) 由于上面的理由，$\dot{x}(t)$只要求是几乎处处存在，所以从而 $x(t)$也只要求是一个绝对连续函数，即 $x(t)\in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$，或者简记为 $x(t)\in AC$。

2.3.1　微分包含问题的提出

有很多读者会问及研究微分包含的必要性，甚至会问现实世界中是否存在应用微分包含的实际系统。因此我们先探讨一下开展这项研究的动因。

1) 具有集合值映射的实际系统

有很多实际系统存在着集合值映射，最典型的是机械系统中的摩擦和电子系统中的二极管。正由于这些最基本的元素的精细描述需要用集合值映射，因此当考虑建立一个动态系统的比较精确的模型时，集合值映射进而微分包含是必须的。下面以机械系统中的摩擦为例来说明应用集合值映射的必要。

早在 1902 年，Stribeck 在考察干性摩擦（指不添加润滑剂时摩擦）时发现摩擦系数变化曲线，世称 Stribeck 曲线（见图 2.9）。在整个过程中，随着速度变化摩擦系数变化可以分为四个阶段：静摩擦，这时摩擦副之间没有相对运动，摩擦系数为 0；Stribeck 摩擦，摩擦副出现相对运动，粗略看摩擦系数渐渐下降；Coulomb 摩擦，继续相对运动，摩擦系数存在最小值；黏性摩擦，摩擦系数随着相对速度增加而增加。上述整个过程呈现明显的非线性特征。在静摩擦阶段存在集合值映射，尽管没有相对滑动，但是摩擦力存在，其大小等于外力，方向相反。

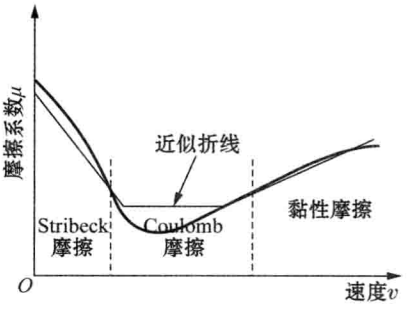


图 2.9 Stribeck 曲线

Glocker(2001)用下列含集合值映射来描述摩擦力 λ：

$$\lambda \in F_f(\dot{q}) = -\mu\lambda_N \operatorname{sgn}(\dot{q}) + F_S(\dot{q}),$$

其中 q 是位移，$F_S(\dot{q})$是滑动摩擦，它是速度的函数；μ 是摩擦系数，λ_N 是正压力，$\operatorname{sgn}(\dot{q})$是符号函数，这里看成是集合值映射：

$$\operatorname{sgn}(\dot{q}) = \begin{cases} 1 & \dot{q} > 0, \\ [-1,1] & \dot{q} = 0, \\ -1 & \dot{q} < 0。 \end{cases}$$

只有干摩擦的被控机械系统可以描述成

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = Su + T\lambda, \tag{2.3.2}$$

其中的 M,D,K 分别是机械系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚性矩阵，q 是含有平动和转动的广义速度，S 是输入矩阵，u 是控制变量，其分量是力或力矩，T 是摩擦矩阵，λ 是摩擦力构成的向量，它的第 i 个分量表示第 i 个接触点的摩擦，由下面的集合值映射表示：

$$\lambda_i \in -\mu_i \lambda_{Ni} \operatorname{sgn}(T_i^{\mathrm{T}} \dot{q}) + F_{Si}(T_i^{\mathrm{T}} \dot{q}),$$

其中 T_i 是 T 的第 i 列，$T_i^{\mathrm{T}} \dot{q}$表示了第 i 个接触点的相对滑动。式(2.3.2)写成状态空间是

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Gw + Bu, \\ z &= Hx, \\ y &= Cx, \\ w &\in -\varphi(z), \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

其中的状态 $x=(q^{\mathrm{T}}\ \dot{q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，$z$ 和 w 分别是集合值映射 $\varphi(\cdot)$的输入和输出，y 是可以量测的输出，其他矩阵可以参照式(2.3.2)对应地写出[6]。式(2.3.3)称为 Luré 型微分包含系统，本书的第 5 章会对此做专门讨论。在实际控制系统中，像干摩擦这样的现象称为继电器特性，这种

特性在自然界是非常普遍的，而这类系统大多可以简化成 Luré 型微分包含系统。

2）一般控制系统

控制系统的状态方程一般形式是

$$\dot{x} = f(x,u), \quad u \in U, \tag{2.3.4}$$

其中的 U 称为允许控制集，不同的 u 产生不同的单值映射 $f(x,u)$，这些 $f(x,u)$ 组成集合 $f(x,U)$。因此在 u 没有确定的时候，式(2.3.4)应该写成 $\dot{x} \in f(x,U)$，这就是微分包含。对 U 的描述就是对控制的限制。例如 U 是有界集，那么允许控制就是有界控制；又如果 $U=\{Fx, F\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$，即允许的控制是线性状态反馈，在线性状态反馈下式(2.3.4)就是 $\dot{x} \in \{f(x,Fx), F\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$。因此一般控制问题都可以看成是微分包含问题。

经典的控制系统设计过程是先指定设计目标，然后根据设计目标来寻找 u。例如反馈镇定设计，设计目标是闭环系统稳定，设计过程就是寻找反馈矩阵 F。如果找不到设计方案，则降低设计目标，以方便控制 u 的获得。应用微分包含可以建立另一类设计过程。先指定设计目标，然后看这个目标是否包含在微分包含的解集 $S(F,C)$，如果解集 $S(F,C)$ 包含那个目标，那么对微分包含作选择，解出 $f(x)$；如果目标不在解集 $S(F,C)$ 中，那么扩大控制集 U，即构造更大的 $\overline{F}$，使得 $S(\overline{F},C)\supset S(F,C)$ 而且最终包含目标。

作为例子，继续考虑例 2.3.1，如果被控微分包含是

$$\dot{x} \in [0.1,0.3]x+u, u \in U, \quad x(0)=1。$$

设计的目标是镇定，因此必须使得图 2.9 的阴影部分能有趋近 t 轴的态势。图 2.10 中的阴影部分表示了一条轨线在端点 A 处期望的导数变化范围：如果从 A 开始要趋向 t 轴，即轨线开始递减，导数必须小于 0，于是允许控制集必须满足 $u+0.1x<0$，即 $U\supset\{u;u<-0.1x,t>0, x>0\}$。

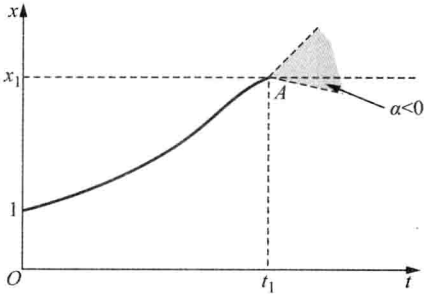


图 2.10　例 2.3.1 中控制集的设计

这个例子说明引进微分包含拓宽了系统设计方法。当控制目标不能实现的时候，可以从减弱目标着手，也可以从拓宽 U 着手。除了一般控制问题(2.3.4)，诸如多模型系统的控制，含有不确定参数系统的控制等等都可以转化成微分包含来考虑。我们在第 4 章和第 5 章再对这个问题作进一步阐述。

3）不连续微分方程

先考虑一个例子。

例 2.3.2 考虑不连续微分方程的 Cauchy 问题

$$\dot{x}=\begin{cases}1 & x<0,\\ -1 & x\geqslant 0,\end{cases}\quad x(0)=0。\tag{2.3.5}$$

这个方程的 Cauchy 问题无解。其原因如下：在(t,x)平面上，考虑始于原点的轨线，因为$\dot{x}(0)=-1$；轨线应该进入第四象限，因为一旦$x<0$，则$\dot{x}>0$，轨线要进入第一象限，而进入第一象限后$\dot{x}<0$，又要回到第四象限；轨线也不能沿着t轴前进，因为导数非零。 □

在例 2.3.2 中，只要$x(0)\neq 0$，方程的解总是存在的。可见当右端不连续的时候，Cauchy 问题未必有解，解的存在与初始值有关。为了克服这种不确定，人们设想了一些改进方案，比较常见的是 Filippov 理论。

在 Filippov 理论中，处理右端不连续的微分方程$\dot{x}=f(x)(x\in\mathbb{R}^n)$的方法是：先将$f(x)$扩大为集合值映射，即定义

$$F(x)=\bigcap_{\delta>0}\operatorname{clco} f(x+\delta B),$$

其中B是$\mathbb{R}^n$中开的单位球。我们将$F(x)$称为$f(x)$的集合值扩张，或者$f(x)$的 Filippov 扩张。根据定义$F(x)$总是闭的和凸的。进一步如果$f(x)$在x_0是有界的，那么F在x_0是上半连续的(本章 2.1 节练习 11)。显然$f(x)$是F的一个选择，而且在$f(x)$所有的连续点x处成立$F(x)=\{f(x)\}$(见下面定理 2.3.2)；然后求解微分包含的 Cauchy 问题$\dot{x}\in F(x)$，$x(0)=x_0$。按照这个步骤求出的解称为**微分方程的 Filippov 解**。我们在下一小节证明在较弱的条件下，微分方程 Cauchy 问题总存在 Filippov 解。

继续例 2.3.2，在$x=0$处，对任意的$\delta>0$，$f(0+\delta B)=\{-1,1\}$，所以$\operatorname{co} f(0+\delta B)=[-1,1]$，$F(0)=[-1,1]$。式(2.3.5)的 Cauchy 问题成为微分包含$\dot{x}\in F(x)$，$x(0)=x_0$的 Cacuchy 问题，其中

$$F(x)=\begin{cases}-1 & x>0,\\ [-1,1] & x=0,\\ 1 & x<0。\end{cases}$$

这个微分方程的 Filippov 解是

$$x(t)=\begin{cases}x_0-\operatorname{sgn}(x_0)t & t\in[0,|x_0|],\\ 0 & t\geqslant|x_0|,\end{cases}$$

其中的符号 sgn(x)取成单值映射，并规定 sgn$(0)=0$。

2.3.2 微分包含 Cauchy 问题解的存在性

这一小节专门讨论微分包含解的存在性问题，将讨论各类不同连续性对微分包含解的存在产生的影响。

在微分方程理论中，对于 Cauchy 问题$\dot{x}=f(x)$，$x(0)=x_0$，只要$f(x)$在x_0的一个邻域中满足局部 Lipschitz 条件，则存在$\tau>0$，Cauchy 问题在$[0,\tau]$上有解，而且只要$x(\tau)$在某个邻域

内继续满足 Lipschitz 条件，那么解就可以延拓。在这个存在性证明中 Lipschitz 条件是本质要求。读者将会发现 Lipschitz 条件在求解微分包含问题时同样重要。

本小节主要目的是：建立有关上半连续微分包含的解的存在性，并用于处理不连续微分方程的 Fillippov 问题；建立 Lipschitz 微分包含解的存在性。

定理 2.3.1　设 X 是 Hilbert 空间，$F(x):X\to X$ 是一个闭凸值和上半连续的集合值映射，而且 gra F 是凸的。如果映射 $x\mapsto m(F(x))$ 是局部紧的，那么存在 $x(t)\in AC$，使得 $\dot{x}(t)\in F(x(t))$，$x(0)=x_0$，即微分包含的 Cauchy 问题 $\dot{x}\in F(x)$，$x(0)=x_0$ 有解。

证明：回忆本章定理 2.2.5，在本定理条件下，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $F(x)$ 的近似选择 $f_\varepsilon(x)$，而且 $f_\varepsilon(x)$ 是等度局部紧的。进一步，近似选择 $f_\varepsilon(x)$ 具有形式

$$f_\varepsilon(x)=\sum_i \alpha_i(x)m(F(x_i)),$$

其中的 $\alpha_i(x)$ 是 Lipschitz 的 1 的分解。

设 $\{\varepsilon_n\}$ 是一个单调递减收敛到 0 的正数序列，将对应于 ε_n 的近似选择 $f_{\varepsilon_n}(x)$ 记成 $f_n(x)$，由于 $f_n(x)$ 是 Lipschitz 映射，因此 Cauchy 问题 $\dot{x}=f_n(x)$，$x(0)=x_0$ 有解，将这个解记成 $x_n(t)$。

由于 $f_n(x)$ 是等度局部紧的，因此存在一个公共的 $\delta>0$，使得对充分大的 n 成立 $f_n(B(x_0,\delta))\subset K$[①]，其中的 K 是个紧集，也就是 $\dot{x}_n(t)\in K$，$t\in[0,T)$。K 是有界的，从而函数序列 $\{x_n(t)\}$ 是等度连续的。根据 Arzela-Ascoli 定理（本书 1.1 节），存在 $x(t)$ 和 $\{x_n(t)\}$ 的子列 $\{x_{n_k}(t)\}$，使得 $x_{n_k}(t)$ 一致地收敛到 $x(t)$。又根据 Alaoglu 定理（定理 1.1.7），对于 $\{\dot{x}_{n_k}(t)\}$ 存在收敛子列，为使记号不太复杂，就设 $\{\dot{x}_{n_k}(t)\}$ 是收敛的，还存在 $v(t)\in L^1[0,\delta)$，使得 $\int_0^t \dot{x}_{n_k}(\tau)\mathrm{d}\tau\to\int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau$。

由于 $x_{n_k}(t)=x_0+\int_0^t \dot{x}_{n_k}(\tau)\mathrm{d}\tau$，因此当 k 趋向无穷时，有 $x(t)=x_0+\int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau$，就是，$x(t)\in AC$，进一步几乎处处成立 $\dot{x}(t)=v(t)$。

最后，近似选择蕴含 $\mathrm{gra}f_{n_k}\subset \mathrm{gra}F+\varepsilon_n B$，就是

$$d[(x_{n_k}(t),f_{n_k}(x(t))),\mathrm{gra}F(x)]<\varepsilon_n,$$

当 $k\to\infty$ 时，$d[(x(t),\dot{x}(t)),\mathrm{gra}F(x)]=0$，必有 $\dot{x}(t)\in F(x(t))$。又因为 $x_{n_k}(0)=x_0$，所以 $x(0)=x_0$。　□

我们用定理 2.3.1 讨论不连续方程 Filippov 解的存在性。

定理 2.3.2　考虑微分方程的 Cauchy 问题，

$$\dot{x}=f(x),\quad x(0)=x_0\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $f(x)$ 是有界但可能是不连续的单值函数，它对应的 Filippov 扩张是

$$F(x)=\bigcap_{\delta>0}\mathrm{clco}f(x+\delta B)$$

则

① 为了叙述的方便，不妨假定对于所有的 n 此式都成立。

$$\dot{x} = F(x), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

的解存在，即微分方程存在 Filippov 解。进一步，如果 $x(t,x_0)$是$\dot{x}=F(x)$的 Cauchy 问题的解，那么当 $f(x)$在 $x(t,x_0)$处连续时，有$\dot{x}(t,x_0)=f(x(t,x_0))$。

证明：根据定义，将 $f(x)$扩展成集合值映射 $F(x)$，这里

$$F(x) = \bigcap_{\delta>0} \operatorname{clco} f(x+\delta B),$$

则 $F(x)$是凸闭值和有界的。现在证明下列两点成立。

(1) 如果 $f(x)$在 x_1 处连续，那么 $F(x_1)=\{f(x_1)\}$。

对于任意选定的 $y_1, y_1 \neq f(x_1)$，令 $\varepsilon = \| y_1 - f(x_1) \|$，则存在 $\delta>0$，使得 $f(x_1+\delta B) \subset B\left(f(x_1), \frac{\varepsilon}{2}\right)$，就是 $y_1 \notin f(x_1+\delta B)$。对于任意的 $z_i \in f(x_1+\delta B)$，考虑它们的凸组合 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i$，$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i\right) - f(x_1) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \| z_i - f(x_1) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$，因此 $y_1 \notin \operatorname{co} f(x_1+\delta B)$；进一步，对任意的 $z \in f(x_1+\delta B)$，$\| y_1 - z \| \geqslant \| y_1 - f(x_1) \| - \| f(x_1) - z \| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$，所以 $y_1 \notin \operatorname{clco} f(x_1+\delta B)$。

然而，对任意的 $\delta>0$，$f(x_1) \in f(x_1+\delta B)$，进一步，$f(x_1) \in \operatorname{clco} f(x_1+\delta B)$和 $f(x_1) \in F(x_1)$。

(2) $F(x)$是上半连续的。

这是本章 2.1 练习 11。

由上述结论(2)，应用定理 2.3.1，微分包含的 Cauchy 问题$\dot{x} \in F(x), x(0)=x_0$ 有解；由上述结论(1)在 $f(x)$的连续处，$\dot{x}(t,x_0)=f(x(t,x_0))$。 □

本节随后讨论满足 Lipschitz 条件的微分包含解的存在性，其意义在于提供了求解微分包含的另一种渠道。我们先给出一个有用的引理。

引理 2.3.1 设 $x(t) \in AC([0,T],\mathbb{R})$，$\dot{x}(t)$和 $x(t)$之间满足不等式：

$$| \dot{x}(t) | \leqslant l(t)x(t) + \rho(t),$$

其中 $l(t), \rho(t) \in L_1([0,T],\mathbb{R})$，而且都是非负函数，那么当 $t \in [0,T]$时，

$$| x(t) | \leqslant e^{\int_0^t l(s)\mathrm{d}s} | x(0) | + \int_0^t \rho(s) e^{\int_0^t l(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_0^s l(\tau)\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}s。$$ □

引理 2.3.1 称为 **Gronwall 不等式**，它是一个基本的微分不等式，在微分方程理论中常用来证明解对参数的连续性。参考文献[5]给出引理 2.3.1 的证明，有兴趣的读者也可以尝试一下来证明它。

定理 2.3.3 设 $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是闭的 Lipschitz 集合值映射，其 Lipschitz 常数为 l②。M 是绝对连续函数空间 $AC([0,T],\mathbb{R}^n)$中的一个子集，$r_0:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$是一个连续的单值映射。如果存在正函数 $\rho(t) \in L_1([0,T],\mathbb{R})$和正数 δ，使得对一切 $x(t) \in M$ 成立

$$d(\dot{x}(t), F(x(t))) \leqslant \rho(t),$$

并且对一切 $x \in \mathbb{R}^n$成立

② 以下会同时用到几个 Lipschitz 常数，因此有时也用 l 表示这个常数。

$$\| r_0(x) - x \| \leqslant \delta,$$

那么存在一个单值映射 $r: M \to S_{[0,T]}(F,C)$③，r 满足下列性质：

(1) r 是连续的；

(2) $r(x(t))(0) = r_0(x(0))$，对一切 $x(t) \in M$ 成立；

(3) 如果 $x(t) \in M \cap S(F,C)$ 和 $r_0(x(0)) = x(0)$，那么 $r(x(t)) = x(t)$；

(4) 记 $\xi(t) = \delta e^{l|t|} + \left| \int_0^t e^{l(|t|-|s|)} \rho(s) \mathrm{d}s \right|$，那么当 $t \in [0,T]$ 时，成立

$$\| r(x(t)) - x(t) \| \leqslant \xi(t), \tag{2.3.6}$$

和

$$\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(x(t)) - \dot{x}(t) \right\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant l\xi(t) + \rho(t)。 \tag{2.3.7}$$

证明：定理的证明是构造性的。先构造一个函数序列，然后证明它的极限满足要求。

(1) 构造函数序列 $\{x_k(t)\}$。

设 $x(t) \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$，构造映射 $\omega(x(t)) = \pi(\dot{x}(t), F(x(t)))$，我们先证明 $\omega(x(t)) \in L_1([0,T], \mathbb{R}^n)$。由于

$$\begin{aligned}
\| \omega(x(t)) \| &\leqslant \| \dot{x}(t) \| + \| \omega(x(t)) - \dot{x}(t) \| \\
&= \| \dot{x}(t) \| + \| \pi(\dot{x}(t), F(x(t)) - \dot{x}(t) \| \\
&= \| \dot{x}(t) \| + d(\dot{x}(t), F(x(t)) \\
&\leqslant 2 \| \dot{x}(t) \| + d(0, F(x(t)) \\
&\leqslant 2 \| \dot{x}(t) \| + d(0, F(x(0)) + l \| x(t) - x(0) \|,
\end{aligned}$$

推导中在第四步中用到了三角不等式 $d(\dot{x}(t), F(x(t))) \leqslant d(0, \dot{x}(t)) + d(0, F(x(t)))$，第五步中应用了 Lipschitz 条件 $F(x(t)) \subset F(x(0)) + l \| x(t) - x(0) \| B$。由于 $x(t)$ 是绝对连续的，因此 $\dot{x}(t) \in L_1$，进而 $\omega(x(t)) \in L_1([0,T], \mathbb{R}^n)$。

由此构造函数序列：

$$x_0(t) \in M,$$

$$x_1(t) = r_0(x_0(0)) + \int_0^t \omega(x_0(\tau)) \mathrm{d}\tau,$$

$$\cdots$$

$$x_{k+1}(t) = x_k(0) + \int_0^t \omega(x_k(\tau)) \mathrm{d}\tau, \quad k > 1,$$

$$\cdots$$

注意：由此定义的函数 $x_k(t)$ 满足 $x_k(0) = r_0(x_0(0))$ 和 $x_k(t) \in AC, k = 1,2,\cdots$

(2) 序列 $\{x_k(t)\}$ 和 $\{\dot{x}_k(t)\}$ 的收敛性。

③ 由于 $S_{[0,T]}(F,C) \subset AC([0,T], \mathbb{R}^n)$，所以 r 是 $AC([0,T], \mathbb{R}^n)$ 到 $AC([0,T], \mathbb{R}^n)$ 的单值映射。

首先，

$$\begin{aligned}&\| x_1(t)-x_0(t)\|\\ \leqslant&\| r_0(x_0(0))-x_0(0)\|+\left\|\int_0^t(\omega(x_0(\tau))-\dot{x}_0(\tau))\mathrm{d}\tau\right\|\\ \leqslant&\delta+\int_0^t\rho(\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{2.3.8}$$

其中常数 δ 和函数 $\rho(t)$ 已经由定理条件给出。其次，

$$\begin{aligned}\| \dot{x}_1(t)-\dot{x}_0(t)\| &=\| \omega(x_0(\tau))-\dot{x}_0(t)\|\\ &=d(\dot{x}_0(t),F(x_0(t))\\ &\leqslant\rho(t)。\end{aligned}\tag{2.3.9}$$

为了将式(2.3.8)和式(2.3.9)推广到一般的 $k>1$，先考虑

$$\begin{aligned}\| \dot{x}_{k+1}(t)-\dot{x}_k(t)\| &=\| \omega(x_k(t))-\dot{x}_k(t)\|\\ &=d(\dot{x}_k(t),F(x_k(t)))\\ &\leqslant d(\dot{x}_k(t),F(x_{k-1}(t))+l\| x_k(t)-x_{k-1}(t)\|\\ &=l\| x_k(t)-x_{k-1}(t)\|。\end{aligned}\tag{2.3.10}$$

在推导第三步时应用了三角不等式和 Lipschitz 条件，在第四步中应用了 $\omega(x_{k-1}(t))=\pi(\dot{x}_{k-1}(t),F(x_{k-1}(t))\in F(x_{k-1}(t))$。现在证明下面两个事实：

$$\| x_{k+1}(t)-x_k(t)\| \leqslant\delta\frac{|lt|^k}{k!}+\int_0^t\frac{(l|t|-|\tau|)^k}{k!}\rho(\tau)\mathrm{d}\tau,\tag{2.3.11}$$

和

$$\| \dot{x}_{k+1}(t)-\dot{x}_k(t)\| \leqslant l\delta\frac{|lt|^{k-1}}{(k-1)!}+l\int_0^t\frac{(l|t|-|\tau|)^{k-1}}{(k-1)!}\rho(\tau)\mathrm{d}\tau,\tag{2.3.12}$$

应用式(2.3.10)，式(2.3.12)是式(2.3.11)的自然结果，因此只要证明式(2.3.11)。

根据式(2.3.8)，式(2.3.11)在 $k=0$ 时成立。假设式(2.3.11)在 $k-1$ 时成立，当 $k>1$ 时，

$$\begin{aligned}\| x_{k+1}(t)-x_k(t)\| &=\left\|\int_0^t(\dot{x}_{k+1}(\tau)-\dot{x}_k(\tau))\mathrm{d}\tau\right\|\\ &\leqslant l\int_0^t\| x_k(\tau)-x_{k-1}(\tau)\|\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant l\int_0^t\left(\delta\frac{|l\tau|^{k-1}}{(k-1)!}+\int_0^\tau\frac{(l|\tau|-|q|)^{k-1}}{(k-1)!}\rho(q)\mathrm{d}q\right)\mathrm{d}\tau\\ &=\delta\frac{|lt|^k}{k!}+l\int_0^t\int_0^\tau\frac{(l|\tau|-|q|)^{k-1}}{(k-1)!}\rho(q)\mathrm{d}q\mathrm{d}\tau。\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_0^{\tau}\dfrac{(l\mid\tau\mid-\mid q\mid)^k}{k!}\rho(q)\mathrm{d}q=\int_0^{\tau}l\dfrac{(l\mid\tau\mid-\mid q\mid)^{k-1}}{(k-1)!}\rho(q)\mathrm{d}q$，因此

$$\delta\frac{\mid lt\mid^k}{k!}+l\int_0^t\int_0^{\tau}\frac{(l\mid\tau\mid-\mid q\mid)^{k-1}}{(k-1)!}\rho(q)\mathrm{d}q\mathrm{d}\tau=\delta\frac{\mid lt\mid^k}{k!}+\int_0^t\frac{(l\mid t\mid-\mid q\mid)^k}{k!}\rho(q)\mathrm{d}q。$$

将第二项中积分变量换成 τ，式(2.3.11)获证。

由于 $\mathrm{e}^z=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{k!}$ 处处成立，因此 $\sum\limits_{k=m}^{\infty}\dfrac{z^k}{k!}\to 0(m\to\infty)$。由此可得在$[0,T]$上，$\{x_k(t)\}$和$\{\dot{x}_k(t)\}$都是 Cauchy 序列。

(3) 定义映射 r。

由上述过程，对于 $x_0(t)\in M$，在几乎处处相等的意义上，唯一地存在 $v(t)\in L_1$，使得$\dot{x}_k(t)\to v(t)$，$k\to\infty$。定义

$$r(x_0(t))=r_0(x_0(0))+\int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau,\tag{2.3.13}$$

那么 $r(x_0(t))\in AC$。又由于$\{\dot{x}_k(t)\}$是收敛序列，从式(2.3.10)知道$\lim\limits_{k\to\infty}d(\dot{x}_k(t),F(x_k(t))=0$。

$$\begin{aligned}\|r(x_0(t))-x_k(t)\|&=\left\|\int_0^t(\dot{x}_k(\tau)-v(t))\mathrm{d}\tau\right\|\\&\leqslant\int_0^t\|\dot{x}_k(\tau)-v(t)\|\mathrm{d}\tau\to 0,\end{aligned}\tag{2.3.14}$$

所以 $0=\lim\limits_{k\to\infty}d(\dot{x}_k(t),F(x_k(t))=d(v(t),F(r(x_0(t)))=d\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(x_0(t)),F(r(x_0(t))\right)$。由于 F 是闭值的，因此$\dfrac{\mathrm{d}r(x_0(t))}{\mathrm{d}t}\in F(r(x_0(t))),r(x_0(t))\in S(F,r(x_0(0)))$。

由定义式(2.3.13)，要求(2)直接获证。进一步由式(2.3.11)，

$$\|x_{k+1}(t)-x_0(t)\|\leqslant\delta\mathrm{e}^{|lt|}+\int_0^t\mathrm{e}^{l|t|-|\tau|}\rho(\tau)\mathrm{d}\tau=\xi(t),$$

同理，由式(2.3.12)，

$$\|\dot{x}_{k+1}(t)-\dot{x}_0(t)\|\leqslant l\delta\mathrm{e}^{|lt|}+l\int_0^t\mathrm{e}^{l|t|-|\tau|}\rho(\tau)\mathrm{d}\tau+\rho(t)=l\xi(t)+\rho(t)。$$

于是，

$$\begin{aligned}\|r(x_0(t))-x_0(t)\|&\leqslant\|x_k(t)-x_0(t)\|+\|r(x_0(t))-x_k(t)\|\\&\leqslant\xi(t)+\|r(x_0(t))-x_k(t)\|,\end{aligned}$$

因此由式(2.3.14)，$\|r(x_0(t))-x_0(t)\|\leqslant\xi(t)$，即式(2.3.6)成立。用同样的方法可以证明式(2.3.7)成立。从而要求(4)获证。

如果 $x_0(t)\in S(F,C)$，那么 $\omega(\dot{x}_0(t))=\dot{x}_0(t)$ 和 $r_0(x_0(0))=x_0(0)$，这样 $x_1(t)=x_0(t)$。类似地可以得到 $x_k(t)=x_0(t)$，$k=1,2,\cdots$，于是 $v(t)=\dot{x}_0(t)$，进一步 $r(x_0(t))=x_0(t)$。这样，要求(3)也获证。

最后证明 r 的连续性。注意到 r 是 M 到 AC 的映射。如果 $x_0(t)\in M$，那么

$$\| x_0(t) \|_{AC} = \| x_0(0) \|_{\mathbb{R}^n} + \int_0^T \| \dot{x}_0(\tau) \|_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\tau。$$

可以认为 $x(t)\in B(x_0(t),\varepsilon)$，则 $x(0)\in B(x_0(0),\varepsilon)$，$\| \dot{x}(t)-\dot{x}_0(t) \|<\varepsilon$。

首先，$\omega(x(t))=\pi(\dot{x}(t),F(x(t)))$ 是 $AC[0,T]$ 到 $AC[0,T]$ 的连续映射（本节练习 4）。从而 $y(t)=x(0)+\int_0^t \omega(x(\tau))\mathrm{d}\tau$ 是从 $x(t)$ 到 $y(t)$ 的连续映射。回到本定理，任意的 k，$x_0(t)$ 到 $x_k(t)$ 是连续映射，而 $v(t)$ 是 $\dot{x}_k(t)$ 一致收敛的极限，从而 $x_0(t)$ 到 $v(t)$ 也是连续映射。这样，最后由式(2.3.13)定义的映射 r 是连续的。 □

定理 2.3.3 是一个非常重要的结果。它给出了从一个集合出发来求取微分包含一个解的方法，而且也是很多问题证明的关键。下面的定理是定理 2.3.3 的自然结论。

定理 2.3.4 如果 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是闭的 Lipschitz 集合值映射，那么微分包含的 Cauchy 问题

$$\dot{x}(t)\in F(x(t)),\quad x(0)=x_0,$$

的解存在。

证明：取 $M=\{0\}$，$r_0=x_0+x$，那么取 $\rho(t)\equiv d(0,F(0))$，$\delta=\| x_0 \|$。应用定理 2.3.3，$r(0)(0)=r_0(0)=x_0$④，存在 $x(t)=r(0)\in S_{[0,\infty]}(F,x_0)$，且 $x(t)$ 满足

$$\| x(t) \| \leqslant \| x_0 \| \mathrm{e}^{l|t|} + \int_0^t \mathrm{e}^{l(|t|-|\tau|)} d(0,F(0))\mathrm{d}\tau。$$ □

定理 2.3.4 只是证明了 $S_{[0,\infty]}(F,x_0)$ 非空，给出了 $S_{[0,\infty]}(F,x_0)$ 的一个元素，没有给出所有的元素。其中的解存在的时间区域只决定于 $F(x)$ 的 Lipschitz 性存在的区域，因此当 $F(x)$ 在 x_0 的邻域里成立 Lipschitz 条件时，那么上面的定理说明存在 $\delta>0$，使得 $S_{[-\delta,\delta]}(F,x_0)\neq\varnothing$。这个结论与微分方程解的存在性结论非常相像。

下面是关于定理 2.3.3 的进一步的注释。

注 1 定理 2.3.3 没有要求 $F(x)$ 的凸性。但是 $F(x)$ 的 Lipschitz 性质在其中有重要作用。 □

注 2 定理 2.3.3 给出了从一个已知的绝对连续函数集 M 出发寻找微分包含解的方法，这是一种逐步逼近的方法，它的关键技术是对给定的 $t\in[0,T]$ 求向量 $\dot{x}(t)$ 在集合 $F(x(t))$ 上的投影。计算过程从一个给定函数 $x_0(t)$ 出发，构造一个序列来逼近微分包含的一个解，这个过程只涉及投影和积分，计算上是可以完成的，因此定理 2.3.3 具有可计算性。 □

注 3 不等式(2.3.6)和(2.3.7)给出了微分包含的解和 $x_0(t)$ 之间的偏差，这个偏差为 δ 和 $\rho(t)$ 所控制。如果开始时将 M 取成单元素集合，$M=\{x_0(t)\}$，而 $x_0(0)=x_0$，这时 δ 可以取成 0，如选 $x_0(t)$ 能使 $\rho(t)$ 比较小，那么从 $x_0(t)$ 出发就可以较快地逼近微分包含的解。 □

注 4 在定理的证明中，可以允许 $T<0$，因此在推导中应用了 $|t|$ 和 $|s|$ 这样的表达。 □

作为定理 2.3.4 一项简单的应用，可以对微分包含解的界给出估计。设 $F(x)$ 的 Lipschitz

④ 在记号 $r(0)(0)$ 中，$r(0)$ 中的 0 表示 M 中的元素 0，它是一个恒等于 0 的常值函数；后面的那个 0 是时间，表示初始时刻。

常数为 l，那么

$$\| x(t,x_0) \| = \| r(0) \| \leqslant \| x_0 \| \mathrm{e}^{l|t|} + \int_0^t \mathrm{e}^{l(|t|-|s|)} d(0,F(0))\mathrm{d}s, \qquad (2.3.15)$$

读者注意，积分式(2.3.15)中的 $d(0,F(0))$ 是原点 O 到 $F(0)$ 的距离，即 $\| m(F(0)) \|$。设 $t>0$，则 $s\in[0,t]$，于是 $\| x(t,x_0) \| \leqslant \| x_0 \| \mathrm{e}^{lt} + \frac{1}{l}\mathrm{e}^{lt-1} \| m(F(0)) \|$，即解的最高增长速度为 e^{lt}，这与微分方程的结论也很相似。

2.3.3　时滞微分包含解的存在性

在结束本小节的时候，我们考虑如何推广微分包含解的存在性，由于微分包含的解只要求几乎处处成立，因此这给存在性的推广带来了便利。作为一个例子我们讨论时滞微分包含的解的存在性。

设 $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是闭的 Lipschitz 集合值映射，考虑带有时滞的微分包含的 Cauchy 问题

$$\dot{x}(t) \in F(x(t),x(t-\tau)); \quad x(t)=\phi(t), \quad t\in[-\tau,0], \qquad (2.3.16)$$

其中 τ 是一个给定的正实数，这里表示延迟时间，$\phi(t)\in AC([-\tau,0])$ 是给定的初始条件。因为 $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是 Lipschitz 的，因此存在常数 l_1 和 l_2 使得

$$d(F(x_1,y_1),F(x_2,y_2)) \leqslant l_1 \| x_1-x_2 \| + l_2 \| y_1-y_2 \|。$$

从而有

$$d(F(x,y),F(0,0)) \leqslant l_1 \| x \| + l_2 \| y \|,$$

或者

$$d(0,F(x,y)) \leqslant l_1 \| x \| + l_2 \| y \| + l_3, \qquad (2.3.17)$$

其中 $l_3=d(0,F(0,0))$。

定理 2.3.5　设 $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是闭的 Lipschitz 集合值映射，那么带时滞的微分包含(2.3.16)的 Cauchy 问题有解。

证明：考虑微分包含的 Cauchy 问题

$$\dot{x}(t) \in F(x(t),\phi(t-\tau)), \quad x(0)=\phi(0),$$

在时间区间$[0,\tau]$上，$\phi(t-\tau)$ 是一个确定的绝对连续函数，因此集合值映射 $F(x(t),\phi(t-\tau))$ 等同于一个时变的集合值映射 $\overline{F}(t,x(t))$，将定理 2.3.3 作适当的推广，解集 $S_{[0,\tau]}(F(x(t),\phi(t-\tau)),\phi(0))$ 非空。

对任意的 $x(t)\in S_{[0,\tau]}(F(x(t),\phi(t-\tau)),\phi(0))$，定义

$$x_\tau(t)=\begin{cases}\phi(t), & t\in[-\tau,0],\\ x(t), & t\in[0,\tau],\end{cases}$$

那么 $x_\tau(t)\in S_{[0,\tau]}(2.3.16)$，为了简便，这里用 $S_{[0,\tau]}(2.3.16)$ 表示时滞微分包含式(2.3.16)的 Cauchy 问题的解。根据式(2.3.15)，可知$\{x_\tau(\tau);x_\tau(t)\in S_{[0,\tau]}(2.3.16)\}$是个有界集，也可以

利用不等式(2.3.17)直接证明，我们将证明留给读者。

对每个 $x_\tau(t)\in S_{[0,\tau]}$(2.3.16)，考虑微分包含的 Cauchy 问题

$$\dot{x}(t)\in F(x(t),x_\tau(t-\tau));\quad x(\tau)=x_\tau(\tau), \tag{2.3.18}$$

将初始时刻取在 τ。因为在时间区间$[\tau,2\tau]$上，$x_\tau(t-\tau)$是一个确定的绝对连续函数，与第一步的证明一样，$S_{[\tau,2\tau]}(F(x(t),x_\tau(t-\tau)),x_\tau(\tau))$非空。

对任意的 $x(t)\in S_{[\tau,2\tau]}(F(x(t),x_\tau(t-\tau)),x_\tau(\tau))$，定义

$$x_{2\tau}(t)=\begin{cases}x_\tau(t), & t\in[-\tau,\tau],\\ x(t), & t\in[\tau,2\tau],\end{cases}$$

那么 $x_{2\tau}(t)\in S_{[0,2\tau]}$(2.3.16)。根据式(2.3.15)，可知$\{x_{2\tau}(\tau);x_{2\tau}(t)\in S_{[0,2\tau]}$(2.3.16)$\}$依然是个有界集。这样解可以继续延拓，时间区间可以一直延拓到$[0,\infty)$。 □

在 $x_\tau(t)$定义在区间$[-\tau,\tau]$上，在 $t=0$ 处，$x_\tau(t)$可能是不可导的，好在在微分包含的理论中，我们并不要求式(2.3.16)处处成立，它可以在一个零测度集上不成立，这点宽松给我们证明定理 2.3.4 带来了方便。

练习

1. 设 $F(x)$是 $f(x)$的集合值扩张，证明在 $f(x)$的连续点 x_0，$F(x_0)=\{f(x_0)\}$。
2. 试证明 Gronwall 不等式(注意应用微分方程理论中的比较原理)。
3. 在引理 2.3.2 的条件下，推导式(2.3.7)成立。
4. 证明在定理 2.3.2 的证明中，$\omega(x(t))=\pi(\dot{x}(t),F(x(t)))$是 $L_1[0,T]$到 $L_1[0,T]$的连续映射。
5. 试用严格的 ε-δ 语言证明式(2.3.13)定义的映射 r 的连续性。
6. 设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是闭的 Lipschitz 集合值映射，其 Lipschitz 常数为 l。$v_0\in F(x_0)$，则存在一个解 $x(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$，满足$\dot{x}(0)=v_0$。即不但可以指定初值，而且可以指定初值的导数。
7. 利用不等式(2.3.17)证明定理 2.3.4 中的集合$\{x_\tau(\tau),x_\tau(t)\in S_{[0,\tau]}$(2.3.16)$\}$是有界的。
8. 如果 $x_1(t)\in S_{[0,T]}(F,x_c)$，$M=\{x_1(t)\}$，那末定理 2.3.3 中的映射 r 可以取成恒等映射。

2.4　微分包含解的定性分析

我们知道，求解微分方程的 Cauchy 问题是非常困难的，因此可想而知求解微分包含的 Cauchy 问题会更加困难，于是产生了微分包含解的定性研究，这种定性的研究可以看成是对微分方程定性理论的一种继承，因为它们几乎研究了相同的问题。限于微分包含问题的困难性，本节只研究局部性质。首先应用上节的定理 2.3.3 考虑 Lipschitz 微分包含的性质，然后研究上半连续微分包含，最后考虑微分包含的凸化问题。

2.4.1　Lipschitz 微分包含解的定性分析

设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个 Lipschitz 集合值映射，而且它是闭凸值的，那么根据定理 2.3.4，微分包含的 Cauchy 问题

$$\dot{x}(t)\in F(x(t)),\quad x(0)=x_0 \tag{2.4.1}$$

在 $t\in[0,T]$（或者 $[-T,0]$）时有解。用 $S_{[0,T]}(F,x_0)$ 表示式(2.4.1)存在于时间区间 $[0,T]$ 上的解集，本小节应用定理 2.3.3 证明下面三个结论，读者不妨练习平行地建立关于 $S_{[-T,0]}(F,x_0)$ 的相应结论。

定理 2.4.1　设 $x_1(t),x_2(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$，那么存在连续映射 $\phi:[0,1]\to S_{[0,T]}(F,x_0)$，使得 $\phi(0)=x_1(t),\phi(1)=x_2(t)$。

证明：设 $M=\{(1-\lambda)x_1(t)+\lambda x_2(t);\lambda\in[0,1]\}$，那么 $M\subset AC([0,T],\mathbb{R}^n)$。为了应用定理 2.3.3，考察 $d((1-\lambda)\dot{x}_1(t)+\lambda\dot{x}_2(t),F((1-\lambda)x_1(t)+\lambda x_2(t))$：

$$\begin{aligned}
&d((1-\lambda)\dot{x}_1(t)+\lambda\dot{x}_2(t),F((1-\lambda)x_1(t)+\lambda x_2(t))\\
\leqslant&d((1-\lambda)\dot{x}_1(t)+\lambda\dot{x}_2(t),\dot{x}_1)+d(\dot{x}_1,F((1-\lambda)x_1(t)+\lambda x_2(t))\\
\leqslant&\lambda\|\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)\|+d(\dot{x}_1,F((1-\lambda)x_1(t)+\lambda x_2(t))\\
\leqslant&\lambda\|\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)\|+d(\dot{x}_1,F(x_1))+d(F(x_1),F((1-\lambda)x_1(t)+\lambda x_2(t)))\\
\leqslant&\lambda\|\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)\|+l\|x_2(t)-x_1(t)\|,
\end{aligned}$$

推导中的第一步和第三步应用了距离三角不等式，第四步应用了 $d(\dot{x}_1,F(x_1))=0$ 和 Lipschitz 条件。设 $\rho(t)=\|\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)\|+l\|x_2(t)-x_1(t)\|$。由于 $x_1(t),x_2(t)\in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$，因此 $\rho(t)\in L_1([0,T],\mathbb{R}^n)$，并取 $r_0(x)=x$。应用定理 2.3.3，存在 $r:M\to S_{[0,T]}(F,x_0)$，r 是连续的，并因为 $x_1(t),x_2(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$，所以 $r(x_1(t))=x_1(t),r(x_2(t))=x_2(t)$。定义

$$\phi(\lambda)=r((1-\lambda)x_1(t)+\lambda x_2(t)),$$

则 $\phi(\lambda)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$，对一切 $\lambda\in[0,1]$，且 $\phi(0)=x_1(t),\phi(1)=x_2(t)$。　□

定理 2.4.1 称为微分包含解集的弧连通定理(见图 2.11)。它说明在绝对连续函数空间中任意两个解 $x_1(t)$,$x_2(t)$只是两个向量,或者说两个点,在这个空间中有条弧将这两个点联系起来,而这条弧整个地落在 $S_{[0,T]}(F,x_0)$中。这个定理也说明在绝对连续函数空间中 $S_{[0,T]}(F,x_0)$的内点非空。

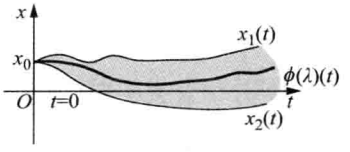


图 2.11 定理 2.4.1 示意图,图中的阴影部分都包含在 $S_{[0,T]}(F,x_0)$中

定义 2.4.1 设 F 是一个集合值映射,定义

$$R_{[0,T]}(F,x_0)=\{x(T);x(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)\}$$

为微分包含 Cauchy 问题式(2.4.1)在 T 时刻的**可达集**。 □

应用定义 2.4.1,在$\mathbb{R}^n$中,定理 2.4.1 可以表述为:如果在$[0,T]$上微分包含式(2.4.1)存在解,那么对每个 $t\in[0,T]$,$R_{[0,t]}(F,x_0)$在$\mathbb{R}^n$上是弧连通的。

定理 2.4.2 如果式(2.4.1)的一个解 $x(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$,满足 $x(T)=x^*$,而 $x^*\in \mathrm{bd}R_{[0,T]}(F,x_0)$,那么对任意的 $t_1\in[0,T]$,$x(t_1)\in \mathrm{bd}R_{[0,t_1]}(F,x_0)$。

证明:用反证法。如果存在 $t_1\in(0,T)$,使得 $x(t_1)\notin \mathrm{bd}R_{[0,t_1]}(F,x_0)$,那么由定理 2.4.1,$x(t_1)$是 $S_{[0,t_1]}(F,x_0)$的内点,即存在 $\varepsilon>0$,使得 $B(x(t_1),\varepsilon)\subset S_{[0,t_1]}(F,x_0)$。由于 $x^*\in \mathrm{bd}R_{[0,T]}(F,x_0)$,因此存在 $y\notin R_{[0,T]}(F,x_0)$,且 $\|y-x^*\|\leqslant\varepsilon e^{-l|t_1-T|}$。取 $M=\{x(t)\}$,那么 $\rho(t)=0$,取 $r_0(x)=x-x^*+y$,那么 $r_0(x^*)=y$。应用定理 2.3.3,可见存在一个解 $y(t)\in S_{[t_1,T]}(F,y_1)$①,$y(T)=y$。又根据定理 2.3.3,$\|y(t_1)-x_1(t_1)\|\leqslant\|y-x^*\|e^{l(T-t_1)}<\varepsilon$,这说明 $y_1=y(t_1)\in R_{[0,t_1]}(F,x_0)$,就是存在一个解 $x_2(t)\in S_{[0,t_1]}(F,x_0)$,$x_2(t_1)=y(t_1)$。于是

$$x_1(t)=\begin{cases}x_2(t) & 0\leqslant t\leqslant t_1,\\ y(t) & t_1\leqslant t\leqslant T。\end{cases}$$

满足 $x_1(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$,且 $x_1(T)=y$,这和 $y\notin R_{[0,T]}(F,x_0)$矛盾。 □

图 2.12 是定理 2.4.2 证明的示意图,其中 $x(T)=x^*$。

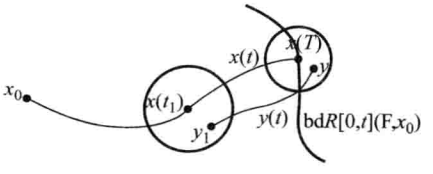


图 2.12 定理 2.4.2 证明的示意图

① 这里是在时间区间$[T-t_1,T]$上应用定理 2.3.3。固定 $y(T)=y$,然后得到 $y(t)\in S_{[T-t_1,T]}(F,y_1)$,其中的 $y_1=y(T-t_1)$。

定理 2.4.2 说明是微分包含式(2.4.1)的解有这样的特点：如果 $x(T)$ 在 $R_{[0,T]}(F,x_0)$ 的边界上，那么，对任意的 $t_1\in[0,T]$，$x(t_1)$ 总在 $R_{[0,t_1]}(F,x_0)$ 的边界。这说明一条到达可达集边界的轨线，任何时候都处在边界状态的。结合例 2.3.1，读者应该可以从图 2.8 体会到这个事实。

定理 2.4.3　设 $S_{[0,T]}(F,x_0)$ 是式(2.4.1)的解集，将它看成是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ 的集合值映射，那么这个集合值映射也是 Lipschitz 的；而且如果 $x_1(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$，那么存在 $S_{[0,T]}(F,x)$ 一个连续选择 $\phi(x)$，使得 $\phi(x_0)=x_1(t)$。

证明：任取 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$，根据定理 2.3.4，$S_{[0,T]}(F,x_1)\neq\emptyset$，任取 $x_1(t)\in S_{[0,T]}(F,x_1)$。构造 $M=\{x_1(t)\}$ 和 $r_0(x)=x-x_1+x_2$，那么在定理 2.3.3 中 $\rho(t)=0$，$\delta=\|x_2-x_1\|$，存在 $r:M\to S_{[0,T]}(F,x_2)$。记 $r(x_1(t))=x_2(t)$，那么应用定理 2.3.3，成立

$$\|\dot{x}_1(t)-\dot{x}_2(t)\|\leqslant\|x_1-x_2\|le^{lt}。$$

根据 AC 中范数的定义：

$$\|x_1(t)-x_2(t)\|_{AC}=\|x_1-x_2\|_{R^n}+\int_0^T\|\dot{x}_1(t)-\dot{x}_2(t)\|\,dt$$

$$\leqslant e^{lT}\|x_1-x_2\|_{\mathbb{R}^n},$$

由于 e^{lT} 独立于 $x_1(t),x_2(t)$ 选取，所以 $S_{[0,T]}(F,x_1)\subset S_{[0,T]}(F,x_2)+e^{lT}B$。

至于第二个问题，选择 $M=\{x_1(t)+x-x_0\}$②和 $r_0(x)=x$，那么存在连续映射 $r:M\to S_{[0,T]}(F,x)$。令：$\phi(x)=r(x_1(t)+x-x_0)$，这个 $\phi(x)$ 满足要求。　□

2.4.2　上半连续微分包含解的分析

这一小节对上半连续的微分包含讨论上一小节研究的问题。继续考虑微分包含的 Cauchy 问题：

$$\dot{x}(t)\in F(x(t)),\quad x(0)=x_0,\tag{2.4.2}$$

式(2.4.2)中的集合值映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是上半连续的和闭凸值的，特别假定 F 是有界的，即存在 $b\in\mathbb{R}\ (>0)$，对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$，$F(x)\subset bB$。

我们先建立两个引理。

引理 2.4.1　设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是一个凸的紧集，$f(t)\in L_1([0,T],\mathbb{R}^n)$，如果对几乎所有的 $t\in[0,T]$，$f(t)\in A$，那么 $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\in A$。　□

引理 2.4.1 可以看成是 Riemann 积分中值定理的推广，可以应用 Lebesgue 积分的定义来证明，此处略去，只是指出集合 A 的凸紧性是必须的。

引理 2.4.2　设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是一个凸的紧集，$x_k(t)\in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$，并且对几乎所有的 $t\in$

② 注意这个 M 不是解集。

$[0,T]$，$\dot{x}_k(t)\in A$，还满足$\lim\limits_{k\to\infty}x_k(t)=x(t)$对所有的$t\in[0,T]$。那么$\dot{x}(t)\in A$几乎处处成立，并且$x(t)\in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$。

证明：因为$\dot{x}_k(t)\in A$，A是有界的，因此$\|\dot{x}_k(t)\|\leqslant l$对某个正实数$l$成立。而

$$\|x_k(t_2)-x_k(t_1)\|\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\|\dot{x}_k(\tau)\|\mathrm{d}\tau\leqslant l\mid t_2-t_1\mid,$$

因此$\{x_k(t),t\in[0,T],k=1,2,\cdots\}$是等度连续的。对上式取极限，$k\to\infty$，可知$x(t)$满足Lipschitz条件，从而$x(t)\in AC([0,T],\mathbb{R}^n)$。又根据引理2.4.1

$$\frac{x_k(t+h)-x_k(t)}{h}=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\dot{x}_k(\tau)\mathrm{d}\tau\in A,$$

再取极限：$k\to\infty$，由于A是紧的，得到$\dfrac{x(t+h)-x(t)}{h}\in A$对$t\in[0,T-h]$。继续利用$A$的紧性，$\dot{x}(t)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{x(t+h)-x(t)}{h}\in A$，对一切$t\in[0,T]$。 □

引理2.4.2说明在一个紧集上，如果一个绝对连续函数序列其导数有界，且点点收敛到一个函数，那么这个函数是AC的，且这个序列在AC的拓扑下也收敛到这个函数。

现在我们叙述这一小节的主要结果，它与定理2.3.3的地位相似，它是证明很多问题的基础。

定理2.4.4 设集合值映射$F,F_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$都是上半连续的和凸闭值的，并且满足：

(1) 存在$b\in\mathbb{R}(>0)$，使得$F(x)\subset\cdots\subset F_{k+1}(x)\subset F_k(x)\subset\cdots\subset F_0(x)\subset bB$对一切$x\in\mathbb{R}^n$成立；

(2) 对任意给定$\varepsilon>0$和$x\in\mathbb{R}^n$，存在$k(x,\varepsilon)$，当$k>k(x,\varepsilon)$时，$F_k(x)\subset F(x)+\varepsilon B$；

那么，如果序列$\{x_k(t)\}$满足：$x_k(t)\in S_{[0,T]}(F_k)$，$x_k(t)$一致地收敛到$x(t)$，则$x(t)\in S_{[0,T]}(F)$。

证明：由于$\dot{x}_k(t)\in F_k(x_k(t))\subset bB$和$x_k(t)$一致地收敛到$x(t)$，因此由引理2.4.2，$x(t)\in AC$。设$x(t)$在$t_0\in[0,T]$可导，并记$x_0=x(t_0)$。由定理的条件2，对于给定的$\varepsilon>0$，存在$k_0=k(x_0,\varepsilon)$，使得$F_{k_0}(x_0)\subset F(x_0)+\varepsilon B$，而$F_{k_0}(x_0)$是上半连续的，因此存在$\eta>0$，当$x\in B(x_0,\eta)$时，

$$F_{k_0}(x)\subset F_{k_0}(x_0)+\varepsilon B\subset F(x_0)+2\varepsilon B。\tag{2.4.3}$$

又因为$x_k(t)$一致地收敛到$x(t)$，所以存在$k_1\geqslant k_0$和γ，使得当$k>k_1$和$|t-t_0|<\gamma$时，成立

$$\|x_k(t)-x(t)\|<\frac{\eta}{2},\quad\|x(t)-x(t_0)\|<\frac{\eta}{2},$$

利用式(2.4.3)，

$$\dot{x}_k(t)\in F_k(x_k(t))\subset F_{k_0}(x_k(t))\subset F_{k_0}(x(t_0))+\varepsilon B\subset F(x_0)+2\varepsilon B。$$

应用引理2.4.2，得到$\dot{x}(t)\in F(x_0)+2\varepsilon B$，对$|t-t_0|<\gamma$成立，特别$\dot{x}(t_0)\in F(x_0)+2\varepsilon B$。由于$\varepsilon$是任意的和$F(x_0)$是闭的，所以$\dot{x}(t_0)\in F(x_0)$。 □

注 在上述定理的证明中，如果$F_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是Lipschitz的集合值映射，则式(2.4.3)也成立，此时定理同样可以获证。结合本章的定理2.2.4，立即可以得到上半连续微分包含的解

的存在性结论。

定理 2.4.5　考虑 Cauchy 问题(2.4.2),它的解存在。　□

推论 2.4.1　设集合值映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是上半连续(或者 Lipschitz)的和凸闭值的,并且存在 b,对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$,有 $F(x)\subset bB$,那么 $S_{[0,T]}(F,x_0)$ 是紧的。

证明:将 F_k 都取成 F,由于 $F(x)\subset bB$,$S_{[0,T]}(F,x_0)$ 中的任意一个序列都是等度连续的,因此,存在收敛子列,由定理 2.4.4,这个极限也属于 $S_{[0,T]}(F,x_0)$。　□

现在来应用定理 2.4.4 证明一系列有用的结论。

称集合 A 是不连通的,如果存在两个非空闭集 A_1,A_2,使得 $A_1\cap A_2=\varnothing$,$A_1\cap A\neq\varnothing$,$A_2\cap A\neq\varnothing$,$A_1\cup A_2\supset A$。否则称集合 A 是连通的。

定理 2.4.6　设集合值映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是有界的、上半连续的和凸闭值的,那么对任意的 $x_0\in\mathbb{R}^n$,$S_{[0,T]}(F,x_0)$ 在连续函数空间 $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ 中是连通的。

证明:用反证法。如果存在 $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ 中的两个非空闭集 $S_1,S_2$③,使得 $S_1\cap S_2=\varnothing$,$S_1\cup S_2\supset S_{[0,T]}(F,x_0)$,而且存在 $x_i(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)\cap S_i$,$i=1,2$。根据本节练习 1,$S_{[0,T]}(F,x_0)$ 是紧集,因此 S_1,S_2 都可以取成是有界的。那么

$$\inf\{\|x_1(t)-x_2(t)\|;x_1(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)\cap S_1,x_2(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)\cap S_2\}$$
$$=2\delta>0。$$

构造一个函数

$$\varphi:S_{[0,T]}(F,x_0)\to\mathbb{R},\quad \varphi(x(t))=d(x(t),S_1)-\delta,$$

当 $x(t)\in S_1$ 时 $\varphi(x(t))=-\delta$,当 $x(t)\in S_2$ 时 $\varphi(x(t))\geqslant\delta$。现在选定一对 $x_1(t)\in S_1\cap S_{[0,T]}(F,x_0)$ 和 $x_2(t)\in S_2\cap S_{[0,T]}(F,x_0)$。

根据本章定理 2.2.4,存在一个 Lipschitz 集合值映射序列 $F_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$,使得

(1) $F(x)\subset\cdots\subset F_{k+1}(x)\subset F_k(x)\subset\cdots\subset F_0(x)\subset bB$ 对一切 $x\in\mathbb{R}^n$ 成立;

(2) 任意给定 $\varepsilon>0$,存在 $k(x,\varepsilon)$,当 $k>k(x,\varepsilon)$ 时,$F_k(x)\subset F(x)+\varepsilon B$。

固定 k,对微分包含 $\dot{x}\in F_k(x)$,$x(0)=x_0$ 应用本节定理 2.4.1,则存在一个连续映射 $\phi_k:[0,1]\to S_{[0,T]}(F_k,x_0)$,它是连续的,并满足 $\phi_k(0)=x_1(t)$,$\phi_k(1)=x_2(t)$。考虑复合函数 $\varphi\circ\phi_k:[0,1]\to R$,由于 $\varphi\circ\phi_k(0)<0$,$\varphi\circ\phi_k(1)>0$,因此存在 $\lambda_k\in(0,1)$,$\varphi\circ\phi_k(\lambda_k)=0$。记 $x_k(t)=\phi_k(\lambda_k)$,那么 $x_k(t)\in S_{[0,T]}(F_k,x_0)$。再根据本节练习 1,序列 $\{x_k(t)\}$ 在连续函数空间中存在收敛子列,不妨认为 $\{x_k(t)\}$ 就是收敛的,即存在 $x(t)$,$x_k(t)$ 一致地收敛到 $x(t)$。应用定理 2.4.4,$x(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$。因为 φ 是连续映射,从 $\varphi(x_k(t))=0$ 得到 $\varphi(x(t))=0$。这意味着 $x(t)\notin S_1\cup S_2$,这和 $S_1\cup S_2\supset S_{[0,T]}(F,x_0)$ 矛盾。　□

定理 2.4.7　设集合值映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是有界的、上半连续的和凸闭值的。再设 $x^*\in \mathrm{bd}R_{[0,T]}(F,x_0)$,那么存在 $x_1(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$,不但使得 $x_1(T)=x^*$,而且对任意的 $t\in[0,T]$,$x_1(t)\in\mathrm{bd}R_{[0,t]}(F,x_0)$。

③　注意不连通是针对连续函数空间讲的,不是在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上的,因为在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上所有的解都经过 $(0,x_0)$。

证明：依然利用本章定理 2.2.4，存在一个 Lipschitz 集合值映射序列 $F_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，使得

(1) $F(x)\subset\cdots\subset F_{k+1}(x)\subset F_k(x)\subset\cdots\subset F_0(x)\subset bB$ 对一切 $x\in\mathbb{R}^n$ 成立；

(2) 对任意给定 $\varepsilon>0$，存在 $k(x,\varepsilon)$，当 $k>k(x,\varepsilon)$ 时，$F_k(x)\subset F(x)+\varepsilon B$。

对每个 k，选取 $x_k\in \mathrm{bd}R_{[0,T]}(F_k,x_0)$，使得 $d(x^*,\mathrm{bd}R_{[0,T]}(F_k,x_0))=\|x_k-x^*\|$。由于 $\mathrm{bd}R_{[0,T]}(F_k,x_0)$ 是闭集，因此 x_k 是存在的。根据定理 2.4.2，存在 $x_k(t)\in S_{[0,T]}(F_k,x_0)$，使得 $x_k(T)=x_k$。根据本节练习 1，序列 $\{x_k(t)\}$ 存在收敛子列，不妨假设 $\{x_k(t)\}$ 本身一致收敛到 $x(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$。

我们断定 $x(T)=x^*$。否则设 $\delta=\|x(T)-x^*\|$，$\delta>0$。由于 $\|x_k-x^*\|\to\|x(T)-x^*\|$，所以对于 $k=1,2,\cdots$ 都成立 $\|x_k-x^*\|\geqslant\frac{\delta}{2}$，任取 $y\in B\left(x^*,\frac{\delta}{2}\right)\subset R_{[0,T]}(F_k,x_0)$，即 $y=y_k(T)$ 对某个 $y_k(t)\in S_{[0,T]}(F_k,x_0)$ 成立。序列 $\{y_k(t)\}$ 存在收敛子列，不妨假设 $\{y_k(t)\}$ 本身一致收敛到 $y(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$。那么 $B\left(x^*,\frac{\delta}{2}\right)\subset R_{[0,T]}(F,x_0)$，与 x^* 是边界矛盾。

最后证明对这个 $x(t)$，$x(t)\in \mathrm{bd}R_{[0,t]}(F,x_0)$ 对一切 $t\in[0,T]$ 成立。因为否则存在 $t_1\in[0,T]$，使得 $x(t_1)+\varepsilon B\subset R_{[0,t_1]}(F,x_0)$，那么应用 F_k 的第二个性质，对充分大的 k 有

$$x_k(t_1)+\frac{\varepsilon}{2}B\subset x(t_1)+\varepsilon B\subset R_{[0,t_1]}(F,x_0)\subset R_{[0,t_1]}(F_k,x_0),$$

这与定理 2.4.2 矛盾。 □

注 定理 2.4.6 和定理 2.4.7 在流形上的微分方程理论中的对应结论分别称为 Kneser 定理和 Hukuhara 定理，关于这两个结论，读者可以参阅文献[6]。

读者需要注意定理 2.4.2 与定理 2.4.7 的区别。定理 2.4.2 是说只要 $x_1(T)=x^*$，就有 $x_1(t)\in \mathrm{bd}R_{[0,t]}(F,x_0)$；而定理 2.4.6 是说在所有满足 $x(T)=x^*$ 的解中，存在一个 $x_1(t)$，使得 $x_1(T)=x^*$，并且 $x_1(t)\in \mathrm{bd}R_{[0,t]}(F,x_0)$。

例 2.4.1 设

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2,\quad F(x)=\begin{cases}\bar{B}_2 & x_2<0,\\ 6\bar{B}_2 & x_2=0,\\ 0 & x_2>0。\end{cases}\tag{2.4.4}$$

其中 $\bar{B}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的闭单位圆。设初始条件是 $x(0)=[0\quad -4]^{\mathrm{T}}$，终点是 $x(T)=[3\quad 0]^{\mathrm{T}}$④，时间区间是 $[0,5]$，即 $T=5$。可以验证 $F(x)$ 是上半连续的，但它不是 Lipshitz 的。例如取 $x^1=[1\quad 0]^{\mathrm{T}}$，则 $F(x^1)=6B_2$；取 $x^2=[1\quad \varepsilon]^{\mathrm{T}}$，$\varepsilon>0$，则 $F(x^2)=0$。要使得

$$6B_2=F(x^1)\subset F(x^2)+l\|x^1-x^2\|B=l\varepsilon B,$$

只有 $l\varepsilon>6$。当 $\varepsilon\to0$ 时，$l\to\infty$。因此 $F(x)$ 不是 Lipschitz 的。

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-4+\frac{8t}{9}\end{bmatrix},\quad t\in\left[0,\frac{9}{2}\right],\quad \begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\left(t-\frac{9}{2}\right)\\0\end{bmatrix},\quad t\in\left[\frac{9}{2},5\right]$$

④ 上标 T 表示转置。

是式(2.4.4)的一个解，满足 $\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}x_1(5)\\x_2(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$。但是 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{8}{9}\end{bmatrix}$，$t\in\left[0,\frac{9}{2}\right]$，它不在 B_2 的边界上。

但是另外的一个解

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}t\\-4+\frac{4}{5}t\end{bmatrix},\quad t\in[0,5],$$

则始终在边界上。 □

定理 2.4.8　设集合值映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是有界的、上半连续的和凸闭值的，那么将 $S_{[0,T]}(F,x_0)$ 看成是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ 的集合值映射，这个集合值映射是上半连续的。

证明：先证明一个更一般的结论。设 $C\subset\mathbb{R}^n$ 为一个紧集，$S_{[0,T]}(F,C)$ 是 $AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ 中的紧集。

设 $\{x_k(x)\}$ 是 $S_{[0,T]}(F,C)$ 中一个函数序列，由于 $F(C)\subset bB$，因而 $\dot{x}_k(x)\leqslant b$ 对所有的 k 成立，这说明序列 $\{x_k(x)\}$ 是等度连续的，因此存在在连续函数空间的收敛子列 $\{x_{k_j}(x)\}$。设 $x_{k_j}(t)\to x_0(t)$。我们只要证明 $x_0(t)\in S_{[0,T]}(F,C)$。$\dot{x}_{k_j}(t)\in F(x_{k_j}(t))$，令 $F_i\equiv F,i=1,2,\cdots$，根据定理 2.4.4，$x_0(t)\in S_{[0,T]}(F,C)$，即 $S_{[0,T]}(F,C)$ 是紧集。

将 $S_{[0,T]}(F,x_0)$ 限制在一个闭集 C 上，由于 $S_{[0,T]}(F,C)$ 是紧的，根据本章 2.1 节练习 12，$S_{[0,T]}(F,x_0)$ 是上半连续的。 □

注意定理 2.4.8 中条件“$F(x)$ 是个凸集”是必须的。

2.4.3　凸化微分包含和松弛定理

本小节最后讨论凸化微分包含和松弛定理，从前面的讨论可以发现，在研究微分包含解存在性的时候，凸集是一个重要的条件，这就导致了凸化的研究。

设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个集合值映射，$\overline{\mathrm{co}}F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是它的闭凸包，我们将

$$\dot{x}\in\overline{\mathrm{co}}F(x)\tag{2.4.5}$$

称为是

$$\dot{x}\in F(x)\tag{2.4.6}$$

的**凸化微分包含**。为了方便以后将 $\overline{\mathrm{co}}F$ 记成 $\overline{F}$。如果初始条件都是 $x(0)=x_0$，那么式(2.4.6)的解一定是式(2.4.5)的解。在凸化中要讨论的问题是：什么时候式(2.4.6)的解集在式(2.4.5)的解集中稠密。本小节要证明下面的重要结论，其证明思路基本与证明微分方程存在性的 Euler 折线法相似，只是构造函数时更加复杂而已。

定理 2.4.9　设 $x_0\in\mathbb{R}^n$，$F:B(x_0,b)\to\mathbb{R}^n$ 是有界和闭值的 Lipschitz 集合值映射，其 Lipschitz 常数为 l，那么存在 $T>0$，在 $I=[-T,T]$ 上，式(2.4.6)的解集在式(2.4.5)中稠密。

就是对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 和式(2.4.5)的一个解 $\bar{x}(t,x_0)$，存在式(2.4.6)的一个解 $x(t,x_0)$，使得对一切 $t\in I$，有 $\|x(t,x_0)-\bar{x}(t,x_0)\|<\varepsilon$。

证明：式(2.4.5)的解存在性是确定的，用 $\bar{x}(t,x_0)$ 表示式(2.4.5)Cauchy 问题的一个解。再记 $F(B(x_0,b))\subset MB$，那么 $I\to\mathbb{R}^n$ 的集合值映射 $F(x(t))$ 和 $\bar{F}(\bar{x}(t))$ 都是 Lipschitz 的，其 Lipschitz 常数全为 lM。

1) 如果对给定的 $\varepsilon>0$，能够找到 $z(t)\in AC, z(0)=x_0$（记成 $z(t,x_0)$），并且满足

$$\|\bar{x}(t,x_0)-z(t,x_0)\|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.4.7}$$

和

$$d(\dot{z}(t,x_0),F(z(t,x_0)))\leqslant\frac{l\varepsilon}{2(e^{lT}-1)}, \tag{2.4.8}$$

那么，将 δ 取成 0，$\rho(t)=\dfrac{l\varepsilon}{2(e^{lT}-1)}$，应用定理 2.3.3，存在 $x\in S_{[0,T]}(F,x_0)$，使得 $\|x(t,x_0)-z(t,x_0)\|\leqslant\displaystyle\int_0^t e^{l(t-s)}\frac{l\varepsilon}{2(e^{lT}-1)}ds\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$。于是 $\|x(t,x_0)-\bar{x}(t,x_0)\|<\varepsilon$。

2) 分成两步来构造 $z(t,x_0)$

(1) 将时间区间 I 作 $2q$ 等分。用 $I_i=[t_i,t_{i+1}]$ 表示第 i 个子区间，其每段长度为 $\dfrac{T}{q}$。令 $\Phi_i=\bar{F}(\bar{x}(t_i))$，由于 $\bar{F}(\bar{x}(t))$ 是 Lipschitz 的，故当 $t\in I_i$ 时，$\bar{F}(\bar{x}(t))\subset\Phi_i+\dfrac{lMT}{q}B$。记 $S=\Phi_i+\dfrac{lMT}{q}B$，则 S 有界，因此可以用格点的办法将它分解成有限个集合的并，即 $S=\bigcup S_j$，每个格点正多面体的直径不超过指定的数 ζ。

在图 2.13 中，最下面的直线是线段 I，它被映射成 $x(t)$。Φ_i 是 $\mathbb{R}^n$ 中的集合 $\bar{F}(x(t_i))$。Φ_x 是在随意点 $x(t)$ 处的集合值映像 $F(x(t))$，虚线围着的是集合 S。中间的竖线和横线是格点的分划线，这些线将 $\mathbb{R}^n$ 分割成直径不超过 ζ 的立方体。注意 S 是独立于 Φ_i 和 Φ_x 的，$\dot{x}(t)$ 的图像穿过所有的 Φ_x，它穿过 $\Phi_{x(t)}$ 于某个集合 S_j，那么这个 $t\in E_j$。

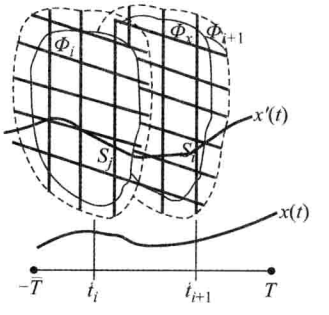


图 2.13 定理 2.4.9 证明示意图

定义集合 $E_j=\{t;t\in I_i,\dot{x}(t)\in S_j\}$，并定义简单函数 $\xi(t)=\sum_j \xi_j\chi_j(t)$，其中 $\xi_j\in S_j$ 是选定的向量，$\chi_j(t)$是集合 E_j 的特征函数，即 $\chi_j(t)=1,t\in E_j;\chi_j(t)=0,t\notin E_j$。于是 $d(\xi_j,\Phi_i)\leqslant \frac{lMT}{q}$，$\|\dot{x}(t)-\xi(t)\|\leqslant\zeta,t\in I_i$。

(2) 由于 $\xi_j\in S_j\subset S=\Phi_i+\frac{lMT}{q}B$，而 $\Phi_i=\mathrm{clco}F(x_i)$，因此存在有限个 $z_{jk}\in F(x_i)$，使得 $\left\|\xi_j-\sum_k \alpha_{jk}z_{jk}\right\|\leqslant\frac{2lMT}{q}$，$\sum_k\alpha_{jk}=1,\alpha_{jk}>0$。由于 $E_j\subset I_i$，可以定义 $\psi(t)=\int_{t_i}^{t}\chi_j(s)\mathrm{d}s$，那么 $\psi(t)$是单调的和 $\psi(t_{i+1})=m(E_j)$，这里的 $m(E_j)$表示集合 E_j 的测度。可以得到一串实数如下：

$$\tau_k=\sup\left\{t;\psi(t)\leqslant m(E_j)\sum_{p=1}^{k}\alpha_{jp}\right\}。$$

于是得到互不相交的集合$[t_i,\tau_1],(\tau_1,\tau_2],\cdots(\tau_{k-1},\tau_k],\cdots$，定义 $E_{jk}=E_j\cap(\tau_{k-1},\tau_k]$⑤。于是 $E_{jk_1}\cap E_{jk_2}=\varnothing,\cup E_{jk}=E_j$。令 $\chi_{jk}(t)$为集合 E_{jk}的特征函数，于是可以定义简单函数 $\rho_j(t)=\sum_k z_{jk}\chi_{jk}(t)$，和 $\rho(t)=\sum_j\rho_j(t)$。最终

$$z(t,x_0)=x_0+\int_0^t\rho(s)\mathrm{d}s。$$

3) 最后我们证明只要 q 充分大，构造的 $z(t,x_0)$能够满足式(2.4.7)和式(2.4.8)

首先，由于 $\dot{z}(t,x_0)\subset F(B(x_0,b))\subset MB$，因此 $z(t,x_0)$满足 Lipschitz 条件，其 Lipschitz 常数也可以为 M。进一步对 $t\in[-T,T]$，总存在 I_i，使得 $t\in I_i$，这时

$$\|x(t)-z(t)\|\leqslant\|x(t)-x(t_i)\|+\|x(t_i)-z(t_i)\|+\|z(t_i)-z(t)\|,$$

$$\|x(t)-x(t_i)\|\leqslant\frac{MT}{q},\quad\|z(t_i)-z(t)\|\leqslant\frac{MT}{q},$$

剩下只要分析 $\|x(t_i)-z(t_i)\|$。

由于 $\xi(t)=\sum_j\xi_j\chi_j(t)$，因此 $\int_{I_i}\xi(s)\mathrm{d}s=\sum_j m(E_j)\xi_j;\rho(t)=\sum_j\sum_k z_{jk}\chi_{jk}(t)$，得到 $\int_{I_i}\rho(s)\mathrm{d}s=\int_{I_i}\sum_j\sum_k z_{jk}\chi_{jk}(s)\mathrm{d}s=\sum_j\sum_k z_{jk}\int_{I_i}\chi_{jk}(s)\mathrm{d}s=\sum_j\sum_k z_{jk}\alpha_{jk}m(E_j)$。所以

$$\begin{aligned}\left\|\int_{I_i}\xi(s)\mathrm{d}s-\int_{I_i}\rho(s)\mathrm{d}s\right\|&\leqslant\sum_j m(E_j)\left\|\xi_j-\sum_k\alpha_{jk}z_{jk}\right\|\\&\leqslant\sum_j m(E_j)\frac{2lMT}{q}\\&\leqslant m(I_i)\frac{2lMT}{q}\\&=\frac{2lMT^2}{q^2}。\end{aligned}$$

⑤ 当 $k=1$ 时，区间为$[t_i,\tau_1]$。

在任意分点 t_i 有

$$\left\| z(t_i) - x_0 - \int_0^{t_i} \xi(s)\mathrm{d}s \right\| = \left\| \int_0^{t_i} \rho(s)\mathrm{d}s - \int_0^{t_i} \xi(s)\mathrm{d}s \right\|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{i} \int_{I_k} \| \rho(s) - \xi(s) \| \mathrm{d}s$$

$$\leqslant \frac{4lMT^2}{q}。$$

另一方面，

$$\left\| x(t_i) - x_0 - \int_0^{t_i} \xi(s)\mathrm{d}s \right\| = \left\| \int_0^{t_i} \dot{x}(s) - \xi(s)\mathrm{d}s \right\| \leqslant \int_0^{t_i} \| \dot{x}(s) - \xi(s) \| \mathrm{d}s \leqslant \zeta T。$$

于是得到 $\| x(t_i) - z(t_i) \| \leqslant \zeta T + \frac{4lMT^2}{q}$。所以对一切 $t \in [-T, T]$，

$$\| x(t) - z(t) \| \leqslant \frac{2MT}{q} + \zeta T + \frac{4lMT^2}{q}。$$

如果在划分 S_j 时，边长取成 $\frac{1}{q}$，那么每个方体的直径为 $\frac{\sqrt{n}}{q}$。这时

$$\| x(t) - z(t) \| \leqslant \frac{\lambda_1}{q}, \tag{2.4.9}$$

其中 $\lambda_1 = (2M + \sqrt{n} + 4lMT)T$。

又 $\dot{z}(t) \in F(x(t_i))$，$t \in I_i$，那么 $d(\dot{z}(t), F(x(t))) \leqslant \frac{lMT}{q}$；应用式(2.4.8)，$F(x(t)) \subset F(z(t)) + \frac{\lambda_1}{q}B$，最后

$$d(\dot{z}(t), F(z(t))) \leqslant \frac{lMT}{q} + \frac{\lambda_1}{q}。$$

因此只要取

$$q = \min\left\{ \left\lfloor \frac{2\lambda_1}{\varepsilon} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2(\mathrm{e}^{lT} - 1)(MT + \lambda_1)}{\varepsilon l} \right\rfloor \right\} + 1,$$

其中 $\lfloor \alpha \rfloor$ 表示不超过 α 的最大整数，则式(2.4.7)和式(2.4.8)同时满足。 □

定理 2.4.9 也称为微分包含中的**松弛定理**，在这个定理中，集合值映射 F 满足 Lipschitz 条件是一个必要条件。如果这个条件不满足，定理未必成立。

练习

1. 设 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个上半连续闭凸值且有界集合值映射，$C \subset \mathbb{R}^n$ 是一个紧集，证明 $R_{[0,T]}(F, C)$ 是紧集。
2. 证明引理 2.4.1。
3. 设 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 Lipschitz 集合值映射，用本章的定理 2.3.3 证明定理 2.4.3 的前半部分，

即：将 $S_{[0,T]}(F,x_0)$ 看成是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ 的集合值映射，那么这个集合值映射也是 Lipschitz 的。

4. 给出例子说明如果 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个上半连续闭集合值映射但不是凸的，定理 2.4.7 未必成立。（提示：考虑集合值映射 $F(x)\equiv\{-1,1\}$ 和解

$$x_k(t)=\begin{cases} t-\dfrac{2i}{k}, & \dfrac{2i}{k}\leqslant t<\dfrac{2i+1}{k},\\ \dfrac{2i+2}{k}-t, & \dfrac{2i+1}{k}\leqslant t<\dfrac{2i+2}{k}, \end{cases}$$

其中 $i=1,2,\cdots,\dfrac{k}{2}$。）

5. 设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是上半连续闭凸值且有界的集合值映射，对每个 F 存在解集 $S_{[0,T]}(F,C)$，其中 $C\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集，于是可以构成一个映射 $\mathrm{gra}(F)\to\mathrm{gra}S_{[0,T]}(F,C)$。证明这个映射是连续的，即任给 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$，当 $\mathrm{gra}\,G\subset\mathrm{gra}\,F+\delta B$ 时，成立 $\mathrm{gra}S_{[0,T]}(G,C)\subset\mathrm{gra}S_{[0,T]}(F,C)+\varepsilon B$。

6. 设 $F:\Lambda\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，$(\lambda,x)\mapsto(\lambda,x)$。如果对任意的 (λ,x)，F 是一个上半连续闭凸值集合值映射，那么任给 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$，当 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 时，

$$\mathrm{gra}S_{[0,T]}(F(\lambda,x(t)),x_0)\subset\mathrm{gra}S_{[0,T]}(F(\lambda_0,x(t)),x_0)+\varepsilon B。$$

7. 设 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为

$$F\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\{-1,1\}\\ \sqrt{|x_2|}+|x_1|\end{bmatrix}$$

(1) 证明 F 是紧值的。

(2) 证明 F 不是 Lipschitz 的。

(3) 考虑 Cauchy 问题 $\dot{x}(t)\in F(x(t))$，$x(0)=0$，证明对这个微分包含问题，松弛定理不成立。

8. 在拓扑学中，弧连通必定是连通的，你能否举出例子说明连通的集合未必是弧连通的？

2.5 微分包含系统的稳定性

无论在微分方程理论还是在控制系统理论中，稳定性是一个基本的问题，因此本节专门讨论微分包含系统的稳定性，采用的是 Lyapunov 直接法。

2.5.1 Dini 导数

由于讨论集合值映射的需要，这里先回顾 Dini 导数的定义及其主要性质。

设(α,β)是$\mathbb{R}$上的开区间，$f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$是一个单值函数，$x_0\in(\alpha,\beta)$，那么

$$D^+ f(x_0)=\limsup_{\Delta x\downarrow 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$D_+ f(x_0)=\liminf_{\Delta x\downarrow 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$D^- f(x_0)=\limsup_{\Delta x\uparrow 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$D_- f(x_0)=\liminf_{\Delta x\uparrow 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

分别称为$f(x)$在x_0处的 Dini 右上导数、Dini 右下导数、Dini 左上导数和 Dini 左下导数。由于$\sup\limits_{\Delta x\downarrow 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$随着$\Delta x$的减小单调递减，因此无论对什么函数$f(x)$、$D^+ f(x_0)$必定存在(有限或负无穷大)。同理可知$D_+ f(x_0)$，$D^- f(x_0)$和$D_- f(x_0)$也必定存在(有限或无穷大)。但是当$f(x)$是 Lipschitz 映射时，这四个 Dini 导数都取有限值。

引理 2.5.1 设$f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$是连续的，那么它是增函数的充分必要条件是下列四个条件中有一个对所有的$x_0\in[\alpha,\beta]$都成立。

(1) $D^+ f(x_0)\geqslant 0$；

(2) $D_+ f(x_0)\geqslant 0$；

(3) $D^- f(x_0)\geqslant 0$；

(4) $D_- f(x_0)\geqslant 0$。

证明：我们只证明第一个条件是充分必要的，其他的条件可以类似地证明。

必要性是显然的。下面仅证明充分性。首先假设$D^+ f(x_0)>0$。如果存在$x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$，$x_1<x_2$，但是$f(x_1)>f(x_2)$。那么存在M使得$f(x_1)>M>f(x_2)$。于是考虑集合$S=\{x;x\in[x_1,x_2),f(x)\geqslant M\}$。由于$f(x_1)>M$，因此$S\neq\varnothing$。考虑$S$的上确界$\xi$，则$\xi<x_2<\beta$。又因为$f$是连续的，只有$f(\xi)=M$，但当$x\in(\xi,x_2]$时，$f(x)<M$，这样$\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}<0$，$x\in$

$(\xi,x_2]$，$D^+f(\xi)\leqslant 0$。矛盾。因此 f 是单调的(未必严格单调)。

其次如果只有 $D^+f(x_0)\geqslant 0$，那么只要设 $g(x)=f(x)+\varepsilon x,\varepsilon>0$，就有 $D^+g(x_0)=D^+f(x_0)+\varepsilon>0$。因此对任意的 $x_1<x_2$，成立 $f(x_1)+\varepsilon x_1=g(x_1)\leqslant g(x_2)=f(x_2)+\varepsilon x_2$，就是 $f(x_1)\leqslant f(x_2)+\varepsilon(x_2-x_1)$。由于 ε 是任意的，因此 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$。 □

注　如果将引理 2.5.1 中的闭区间$[\alpha,\beta]$改成开区间(α,β)，结论依然成立。

引理 2.5.1 表明在单调性问题上，四个 Dini 导数的意义是等价的。

引理 2.5.2　设 $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，如果 $D^+f(x)\leqslant g(x)$ 对一切 $x\in[\alpha,\beta]$ 成立，那么 $f(\beta)-f(\alpha)\leqslant\int_\alpha^\beta g(x)\mathrm{d}x$。

证明：因为 $D^+f(\alpha)\leqslant g(\alpha)$，所以对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1=\delta(\alpha,\varepsilon)>0$，使得 $\alpha+\delta_1<\beta$，并且

$$\frac{f(\alpha+\Delta x)-f(\alpha)}{\Delta x}\leqslant g(\alpha)+\varepsilon,\quad \Delta x\in[0,\delta_1]。$$

取定 $\Delta x=\delta_1$，则上式成为

$$f(\alpha+\delta_1)-f(\alpha)\leqslant\delta_1 g(\alpha)+\delta_1\varepsilon。$$

用 $\alpha+\delta_1$ 代替 α 重复上述过程，存在 $\delta_2=\delta(\alpha+\delta_1,\varepsilon)>0$，使得 $\alpha+\delta_1+\delta_2<\beta$，并且

$$f(\alpha+\delta_1+\delta_2)-f(\alpha+\delta_1)\leqslant\delta_2 g(\alpha+\delta_1)+\delta_2\varepsilon。$$

这个过程可以重复下去，得到 $\delta_i>0$。那么必定 $\alpha+\sum_i\delta_i=\beta$。因为否则 $\alpha+\sum_i\delta_i=\xi<\beta$，则必有 $\delta>0$ 使得 $f(\xi+\delta)-f(\xi)\leqslant\delta g(\xi)+\delta\varepsilon$，选取 δ 的过程可以继续。于是得到

$$f(\beta)-f(\alpha)\leqslant\sum_i\delta_i g\left(\alpha+\sum_{k=0}^{i-1}\delta_k\right)+(\beta-\alpha)\varepsilon。\tag{2.5.1}$$

由于 h 是连续函数，因此它是 Lesbegue 可积的，当 $\varepsilon\to 0$ 时，所有的 $\delta_i\to 0$。因此式(2.5.1)的右端趋向 $\int_\alpha^\beta g(x)\mathrm{d}x$。 □

为了将上述关于 Dini 导数的定义推广到 n 维 Euclid 空间，我们对本小节开始定义的 Dini 导数稍加变化。将 1 看成$\mathbb{R}$ 上单位向量，那么本节开始定义的 $D^+f(x_0)$可以写成

$$D^+f(x_0)=\limsup_{\delta\downarrow 0}\frac{f(x_0+\delta\cdot(1))-f(x_0)}{\delta}=D^+f(x_0)(1),\tag{2.5.2}$$

记号 $D^+f(x_0)(1)$可以这样理解，$D^+f(x_0)$是一个算子，它作用于向量 1。同样地，$D^-f(x_0)=D^+f(x_0)(-1)$。如果采用相似的规律应该将 $D_+f(x_0)$改写成 $D_+f(x_0)(1)$，将 $D_-f(x_0)$改写成 $D_+f(x_0)(-1)$，但是这种记法上下标都是＋号了，于是想到稍微改变一下记号，记 $D_+f(x_0)=D^-f(x_0)(1)$和 $D^-f(x_0)(-1)=D_-f(x_0)$。采用这样的记法，不用下标了，且 Dini 导数只有两种：上导数和下导数了。

定义 2.5.1　设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是一个单值函数，$x_0,v\in\mathbb{R}^n$，那么

$$D^+f(x_0)(v)=\limsup_{h\downarrow 0,v'\to v}\frac{f(x_0+hv')-f(x_0)}{h},$$

$$D^{-} f(x_0)(v) = \liminf_{h \downarrow 0, v' \to v} \frac{f(x_0 + hv') - f(x_0)}{h},$$

分别称为 f 在 x_0 处沿着方向 v 的 Dini 上导数和 Dini 下导数。有时将两者统称为 **Dini 导数**。□

将值域考虑成闭的实数域 $\mathfrak{R}$，则 f 在定义域的任何地方处沿着任意方向的 Dini 导数总是存在的。进一步，如果 f 是 Lipschitz 的，那么它的 Dini 导数是有限的。

下面的定理对于应用 Lyapunov 直接方法是基本的。

定理 2.5.1 设 $x(t)$ 是微分方程 $\dot{x} = f(x)$ 的一个解，且 $x(t):[0,T] \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$。$V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为单值连续映射，在 Ω 内满足 Lipschitz 条件，那么 $V(x(t)):\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 成立：

$$D^{+} V(x(t))(1) = \limsup_{h \downarrow 0} \frac{V(x(t) + hf(x(t))) - V(x(t))}{h},$$

$$D^{-} V(x(t))(1) = \liminf_{h \downarrow 0} \frac{V(x(t) + hf(x(t))) - V(x(t))}{h}。$$

证明：根据定义

$$\begin{aligned} D^{+} V(x(t))(1) &= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{V(x(t+h)) - V(x(t))}{h} \\ &= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{V(x(t) + hf(x(t)) + o(h)) - V(x(t))}{h} \\ &\leqslant \limsup_{h \downarrow 0} \frac{V(x(t) + hf(x(t)) + L \mid o(h) \mid - V(x(t))}{h} \\ &= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{V(x(t) + hf(x(t)) - V(x(t))}{h}, \end{aligned}$$

其中 $x(t+h) = x(t) + \dot{x}(t)h + o(h) = x(t) + hf(x) + o(h)$ 是应用了 $x(t)$ 的 Taylor 展开，$o(h)$ 是 h 的高价无穷小。在不等式中应用了中值定理。另一方面

$$\begin{aligned} D^{+} V(x(t))(1) &= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{V(x(t) + hf(x(t)) + o(h)) - V(x(t))}{h} \\ &\geqslant \limsup_{h \downarrow 0} \frac{V(x(t) + hf(x(t)) - L \mid o(h) \mid - V(x(t))}{h} \\ &= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{V(x(t) + hf(x(t)) - V(x(t))}{h}。 \end{aligned}$$

因此结论成立。另一个结论可以类似地证得，留作练习。□

定理 2.5.1 说明，采用 Lyapunov 直接方法的时候，对于 Dini 导数也可以不解出 $x(t)$，而用 $f(x)$ 代入。

2.5.2 微分包含系统的稳定性

微分包含的稳定性理论是沿着对微分方程的 Lyapunov 稳定性拓展而展开的。讨论稳定性先要有平衡点。

设 $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个集合值映射。如果存在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，使得 $0 \in F(x_0)$，那么 $x(t) \equiv x_0$ 是微分包含 $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ 的解。沿用微分方程的说法，x_0 就称为微分包含 $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ 的

一个平衡点。如果 $0\in F(x_0)$，只要令 $y=x-x_0$ 和 $\hat{F}(y)=F(y+x_0)$，于是就有 $0\in\hat{F}(0)$，就是 $y(t)\equiv 0$ 是微分包含 $\dot{y}(t)\in\hat{F}(y(t))$ 的平衡点。所以当我们讨论微分包含系统稳定性的时候，总可以假设 $0\in F(0)$，并对原点来讨论它的稳定性。

在微分方程稳定性的现代理论中，常用到 **K** 类函数和 **L** 类函数。我们现在给出它们的定义。$\alpha:\mathbb{R}(\geqslant 0)\to\mathbb{R}(\geqslant 0)$ 称为是 **K** 类函数，如果 α 是连续的和严格单调递增的，并且 $\alpha(0)=0$；如果进一步有 $\alpha(t)\to\infty(t\to\infty)$，则称是它是 **KR** 类函数。$\beta:\mathbb{R}(\geqslant 0)\to\mathbb{R}(\geqslant 0)$ 称为是 **L** 类函数，如果 β 是连续的、严格单调递减的和 $\beta(\infty)=0$。可以将这些概念复合，例如 $k:\mathbb{R}(\geqslant 0)\times\mathbb{R}(\geqslant 0)\to\mathbb{R}(\geqslant 0)$ 称为 **KL** 类函数，如果固定第二个变量它是 **K** 类函数，固定第一个变量它是 **L** 类函数。

K 类函数的基本性质有：如果 α_1,α_2 是 **K** 类函数，那么它们的和 $\alpha_1+\alpha_2$ 以及它们的复合 $\alpha_1(\alpha_2)$ 也是 **K** 类函数；如果 α 是 **K** 类函数，$k>0$，$k\alpha$ 也是 **K** 类函数；如果 α 是 **K** 类函数，那么它是可逆的，而且 α^{-1}（表示 α 的逆函数）也是 **K** 类函数。关于 **L** 类函数可以有类似的讨论，我们将它们放在练习中。

$V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}(\geqslant 0)$ 称为正定的，如果 $V(0)=0$，而当 $x\neq 0$ 时，$V(x)>0$；如果 $V(0)=0$，而当 $x\neq 0$ 时，$V(x)\geqslant 0$，则称它是半正定的；如果进一步有 $V(x)\to\infty(x\to\infty)$，则它是正定（半正定）无穷大的。正定函数在 Lyapunov 理论扮演重要的角色，通常将这类函数称为 V 函数。我们用 **K** 类函数描述 V 函数的性质。

如果 $V(x)$ 是正定的连续函数，那么存在 **K** 类函数 α_1 和 α_2，使得

$$\alpha_2(\|x\|)\leqslant V(x)\leqslant\alpha_1(\|x\|)。$$

如果 $V(x)$ 是正定无穷大的，那么 α_1 和 α_2 都是 **KR** 类函数。

类似地可以定义负定、半负定和负定无穷大函数，此处从略。

关于 **K** 类函数构成的微分方程，下面的引理 2.5.3 是基本的，它的证明可以参阅文献[7]。

引理 2.5.3　设 α_1 是 **K** 类函数，$y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}(\geqslant 0)$ 满足下列微分方程

$$\dot{y}=-\alpha(y),\quad y(t_0)=y_0,$$

那么存在 **KL** 类函数 β，满足 $|y(t)|\leqslant\beta(|y_0|,t-t_0)$；即微分方程是渐近稳定的。　□

用 $S(F,x_0)$ 表示微分包含 Cauchy 问题①

$$\dot{x}(t)\in F(x(t)),\quad x(0)=x_0 \tag{2.5.3}$$

的解集。注意我们已经假设 $0\in F(0)$。

定义 2.5.2　如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)$，当 $\|x_0\|<\delta$ 时，

(1) 如果对所有的 $x(t,x_0)\in S(F,x_0)$，都有 $\|x(t,x_0)\|<\varepsilon$②，则称平衡点 $x(t)\equiv 0$ 是强稳定的；

① 在讨论微分方程稳定性的时候，总假设解存在于 $[t_0,\infty)$，其中 t_0 为初始时间。因此在讨论微分包含稳定性问题的时候，也总假设解存在于 $[t_0,\infty)$，所以在记号 $S(F,x_0)$ 中，将表示时间范围的下标略去了。

② 其中范数为 n 维连续函数空间的范数，即 $\|x(t,x_0)\|_{\mathbb{R}}=\sqrt{\max\limits_t x_1^2(t,x_0)+\max\limits_t x_2^2(t,x_0)+\cdots+\max\limits_t x_n^2(t,x_0)}$，但为了表述简单，本节中将下标 $\mathbb{R}$ 都略去了。

(2) 如果至少有一个 $x_1(t,x_0)\in S(F,x_0)$，使得 $\|x_1(t,x_0)\|<\varepsilon$，则称平衡点 $x(t)\equiv 0$ 是弱稳定的；

(3) 如果微分包含不是弱稳定的，则称平衡点 $x(t)\equiv 0$ 是不稳定的。 □

定义 2.5.3 如果微分包含(2.5.3)的平衡点 $x(t)\equiv 0$ 是强稳定的，并且进一步有

$$\lim_{t\to\infty} x(t,x_0)=0$$

则称平衡点 $x(t)\equiv 0$ 是强渐近稳定的。

如果微分包含(2.5.3)的平衡点 $x(t)\equiv 0$ 是弱稳定的，并且对某个解进一步有

$$\lim_{t\to\infty} x(t,x_0)=0$$

则称平衡点 $x(t)\equiv 0$ 是弱渐近稳定的。 □

可以应用 **K** 类函数和 **KL** 类函数来改写稳定性的定义。例如称微分包含(2.5.3)的平衡点 $x(t)\equiv 0$ 是强稳定的，如果存在 $\alpha\in\mathbf{K}$，使得对每个 $x(t,x_0)\in S(F,x_0)$，在 $\mathbb{R}^n$ 的原点某个邻域中成立 $\|x(t,x_0)\|\leqslant\alpha(\|x_0\|)$；称微分包含(2.5.3)的平衡点 $x(t)\equiv 0$ 是强渐近稳定的，如果存在 $\beta\in\mathbf{KL}$，使得对每个 $x(t,x_0)\in S(F,x_0)$，$\|x(t,x_0)\|\leqslant\beta(\|x_0\|,t)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的原点某个邻域中成立。类似地可以有弱稳定和弱渐近稳定的定义。这里不一一给出。

通常，我们会省去强稳定、强渐近稳定中的“强”字，而仅称是稳定的和渐近稳定的。而且还略去“平衡点”三个字，只称微分包含系统是稳定的，弱稳定的；渐近稳定的，弱渐近稳定的，不稳定的，等等。

2.5.3 微分包含系统稳定性的类 Lyapunov 判据

由于求解微分方程非常困难，应用其解来判别微分方程的稳定性变得难以实施，于是应用 Laypunov 直接方法是自然的趋势。这一小节将给出微分包含系统稳定性的类 Lyapunov 判据。

考虑微分包含(2.5.3)，设其中的集合值映射 $F(x)$ 是上半连续的和凸紧值的。

定理 2.5.2 如果存在一个常数 $\eta>0$，还存在一个正定的连续函数 $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 与一个半负定连续函数 $W:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，使得对一切满足 $\|x\|\leqslant\eta$ 和 $v\in F(x)$ 成立

$$D^+V(x)(v)\leqslant W(x),$$

那么微分包含(2.5.3)是稳定的。

证明：任取正数 ε 满足 $\varepsilon<\eta$，考虑集合 $\Omega=\{x,\|x\|=\varepsilon\}$，用 μ 表示 V 在 Ω 上的最小值，即 $\mu=\min\{V(x),x\in\Omega\}$，则 μ 是存在的，且 $\mu>0$。然后取 $\delta>0$，当 $\|x\|<\delta$ 时，$V(x)<\mu$。

用 $x(t,x_0)$ 表示式(2.5.3)的一个解，其中 $\|x_0\|<\delta$。根据定义

$$D^+V(x(t,x_0))(1)=\limsup_{h\downarrow 0}\frac{V(x(t+h),x_0)-V(x(t),x_0)}{h}。$$

设 $\{h_n,n=1,2,\cdots\}$ 是一个单调递减收敛到 0 的序列，那么满足

$$D^+V(x(t,x_0))(1)=\limsup_{n\to\infty}\frac{V(x(t+h_n),x_0)-V(x(t),x_0)}{h_n}。$$

由于

$$x(t+h_n)=x(t)+h_n\frac{x(t+h_n)-x(t)}{h_n},$$

而$\dot{x}(t)\in F(x(t))$，所以对任意的$\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时，成立

$$\upsilon_n=\frac{x(t+h_n)-x(t)}{h_n}\in F(x(t))+\varepsilon B。$$

进一步，由于$F(x(t))$是紧的，υ_n有收敛子列，不妨就认为$\upsilon_n\to\upsilon$，则$\upsilon\in F(x(t))$。这样

$$\begin{aligned}D^+V(x(t))(1)&=\limsup_{n\to\infty}\frac{V(x(t+h_n),x_0)-V(x(t,x_0))}{h_n}\\&=\limsup_{n\to\infty}\frac{V(x(t,x_0)+h_n\upsilon_n)-V(x(t,x_0))}{h_n}\\&\leqslant D^+V(x(t))(\upsilon)\leqslant W(x(t)),\end{aligned}$$

应用引理 2.5.2，得到

$$V(x(t))-V(x(0))\leqslant\int_0^t W(x(s))\mathrm{d}s<0,\tag{2.5.4}$$

因此$V(x(t))\leqslant V(x(0))<\mu$。那么$\|x(t)\|<\varepsilon$。　□

用图 2.14 来说明定理 2.5.2 最后的判断成立。

在图 2.14 中，最外面的圆表示集合$\|x\|=\varepsilon$，在A,B等点$V(x)$达到这个集合上的最小值μ。$\|x\|=\varepsilon$内部的封闭折线是集合$\{x;V(x)=\mu\}$，它必定在$\|x\|\leqslant\varepsilon$内。这蕴涵$\{x;V(x)<\mu\}\subset\{x;\|x\|<\varepsilon\}$。

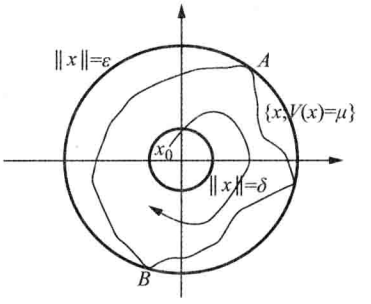


图 2.14　定理 2.5.2 证明中集合关系

在定理 2.5.2 的证明中，建立了对一切$\upsilon\in\mathbb{R}^n$，成立不等式

$$D^+V(x(t))(1)\leqslant D^+V(x(t))(\upsilon)。\tag{2.5.5}$$

在定理 2.5.2 的证明中只用到$F(x)$的紧性，$F(x)$的上半连续和凸值性质只是用来保证解的存在。因此如果已知解是存在的，只要$F(x)$是紧的就可以应用上述判据。另外，证明中的$D^+V(x(t))(1)$和$D^+V(x(t))(\upsilon)$意义是不同的，前者的自变量是t，后者的变量是υ。

应用 **K** 类函数，定理 2.5.2 的条件$D^+V(x)(\upsilon)\leqslant W(x)$可以换成$D^+V(x)(\upsilon)\leqslant 0$。因为由它和式(2.5.5)，

$$\alpha_2(\|x(t)\|)\leqslant V(x(t))\leqslant V(x(0))\leqslant\alpha_1(\|x_0\|),$$

即 $\| x(t) \| \leqslant \alpha_2^{-1}\alpha_1(\| x_0 \|)$，微分包含系统稳定。

定理 2.5.3 如果存在一个常数 $\eta>0$，还存在一个正定的连续函数 $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 与一个负定连续函数 $W:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，使得对一切满足 $\| x \| \leqslant \eta$ 和 $\upsilon\in F(x)$ 成立

$$D^+V(x)(\upsilon)\leqslant W(x),$$

那么微分包含(2.5.3)是渐近稳定的。

证明：根据定理 2.5.2，对任意的 $\varepsilon\in[0,\eta]$，存在 $\delta>0$，使得当 $\| x_0 \|<\delta$ 时，对一切 $x(t,x_0)\in S(F,x_0)$，成立 $\| x(t,x_0) \|<\varepsilon$。

假如存在一个解 $\bar{x}(t,x_0)\in S(F,x_0)$，使得 $\bar{x}(t,x_0)$ 不收敛到 0，即存在常数 $l>0$ 和序列 $\{t_n\}\subset\mathbb{R}$，$t_n\to\infty(n\to\infty)$，使得 $\| \bar{x}(t_n,x_0) \|\geqslant l$，显然这个 l 满足 $l<\varepsilon$。用这个 l 代替 ε，重复证明开头的过程，存在 $\bar{\delta}>0$，当初始条件 $\| \bar{x}_0 \|<\bar{\delta}$ 时，$\| x(t,\bar{x}_0) \|<l$ 对一切 $x(t,\bar{x}_0)\in S(F,\bar{x}_0)$ 成立。因此对这个解 $\bar{x}(t,x_0)$ 只有 $\bar{\delta}\leqslant\| x_0 \|\leqslant\delta$ 和 $\bar{\delta}\leqslant\| \bar{x}(t,x_0) \|\leqslant\eta$。记 $W(x)$ 在集合 $\bar{\delta}\leqslant\| x \|\leqslant\eta$ 上最大值为 $-\lambda(\lambda>0)$。

另一方面，根据定理条件，式(2.5.5)成立，所以可得式(2.5.4)，即

$$V(\bar{x}(t,x_0))-V(\bar{x}(0,x_0))\leqslant\int_0^t W(\bar{x}(t,x_0))\mathrm{d}t\leqslant-\lambda t,$$

于是 $V(\bar{x}(t,x_0))\leqslant-\lambda t+V(\bar{x}(0,x_0))$。$V(\bar{x}(0,x_0))$ 是常数，所以存在 t 使得 $V(\bar{x}(t,x_0))<0$。这是不可能的，因为 V 是正定的。这个矛盾说明所有的解都收敛到 0。 □

下面的定理是关于不稳定的。

定理 2.5.4 设存在 $\eta>0$，和存在连续函数 $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足 $V(0)=0$ 和负定连续函数 $W:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$。使得

$$D^+V(x)(\upsilon)\leqslant W(x)$$

对一切满足 $\| x \|\leqslant\eta$ 和 $\upsilon\in F(x)$ 成立。如果对任意小的 $\delta>0$，总有 $\| x \|<\delta$ 使得 $V(x)<0$，那么微分包含(2.5.3)是不稳定的。

证明：考虑 $V(x)$ 在 $\| x \|\leqslant\delta$ 上的最小值，则由定理条件有 $\min\limits_{\| x \|\leqslant\delta}V(x)<0$，记 $x_\delta=\arg\min\limits_{\| x \|\leqslant\delta}V(x)$。考虑以 x_δ 为初始值的式(2.5.3)的解 $x(t)$，根据定理条件得到式(2.5.5)，因而由式(2.5.4)可得

$$V(x(t))-V(x_\delta)=V(x(t))-V(x(0))\leqslant\int_0^t W(x(s))\mathrm{d}s\leqslant 0,$$

就是 $V(x(t))\leqslant V(x_\delta)$。根据 x_δ 的定义，只有 $\| x(t) \|\geqslant\delta$。令 $-\lambda=\max\limits_{\delta\leqslant\| x \|\leqslant\eta}W(x)$，则 $\lambda>0$。与式(2.5.5)式类似，可以得到 $V(x(t))\leqslant V(x_\delta)-\lambda t$。由于 $V(x)$ 是连续的，在有限的 x 处不会趋向负无穷，因此只有存在 T 使得 $\| x(T) \|=\eta$。微分包含(2.5.3)不可能是稳定的。 □

本节最后的定理是关于弱稳定的。在下面的定理中，我们假设集合值映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是闭凸值的，有界的和 Lipschitz 的。

定理 2.5.5 设存在 $\eta>0$ 和正定的连续函数 $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足 $V(0)=0$ 和 Lipschitz 条件，还存在半负定连续函数 $W:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$。使得对任意的 $x\in\eta B$，存在 $\upsilon\in F(x)$，成立

$$D^{-}V(x)(\upsilon)\leqslant W(x),$$

那么微分包含(2.5.3)是弱稳定的。

证明:如果我们能够证明,在定理的条件下,存在 $\delta>0$ 对一切满足 $\|x_0\|\leqslant\delta$ 的 x_0,对任意的 $T>0$ 存在一个 $x(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$ 使得式(2.5.4)成立,即

$$V(x(T))-V(x_0)\leqslant\int_0^T W(x(s))\mathrm{d}s,$$

那么由定理 2.5.1 的证明方法可知这个 $x(t)$ 是稳定的,进而微分包含(2.5.3)是弱稳定的。

用 l 和 L 分别表示 F 和 V 的 Lipschitz 常数。再设 $x(t)$ 是定义在 $[0,T]$ 上的一个绝对连续函数,对足够小的 $\varepsilon>0$ 定义

$$\phi_\varepsilon(x(t),t)=V(x(t))-V(x(0))-\int_0^t W(x(s))\mathrm{d}s-\varepsilon t,\tag{2.5.6}$$

则 $\phi_\varepsilon(x(t),t)$ 对 $x(t)$ 和 t 都是连续的,且 $\phi_\varepsilon(x(0),0)=0$。我们先证明下面结论。

1) 对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $x(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$,使得式(2.5.6)不大于 ε。

设 $x(t)$ 是 $[0,T]$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的绝对连续函数,定义

$$\theta(x(t))=\max\{t\in[0,T];\phi_\varepsilon(x(t),t)\leqslant 0,\max_{s\in[0,t]}\phi_\varepsilon(x(s),s)\leqslant\varepsilon\}。$$

$\phi_\varepsilon(x(0),0)=0$ 对一切 $x(t)$ 成立,因此集合 $\{t\in[0,T];\phi_\varepsilon(x(t),t)\leqslant 0,\max_{s\in[0,t]}\phi_\varepsilon(x(s),s)\leqslant\varepsilon\}$ 非空。记 $\hat{t}=\sup\{\theta(x(\cdot));x(\cdot)\in S_{[0,T]}(F,x_0)\}$③,现在证明下面两个事实。

(1) 存在 $\hat{x}(\cdot)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$,使得 $\hat{t}=\theta(\hat{x})$。

根据 $\hat{t}$ 的定义,存在 $x_k(\cdot)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$,使得 $\hat{t}_k=\sup\{\theta(x_k(\cdot))\}$ 满足 $t_k\uparrow\hat{t}$。那么由于 $F(x)$ 是有界的,因此 $\{x_k(t)\}$ 等度连续。存在收敛子列,不妨认为 $\{x_k(t)\}$ 就是收敛的,其极限是 $\hat{x}(t)$。根据本章的推论 2.4.1,$\hat{x}\in S_{[0,T]}(F,x_0)$。由于 $\phi_\varepsilon(x(t),t)$ 对 $x(t)$ 是连续的,因此 $\hat{t}=\theta(\hat{x})$。

(2) $\hat{t}=T$。

假设 $\hat{t}<T$,那么 $\phi_\varepsilon(\hat{x}(\hat{t}),\hat{t})=0$。根据定理条件,对这个 $\hat{x}(\hat{t})$ 存在 $\upsilon\in F(\hat{x}(\hat{t}))$,使得 $D^{-}V(\hat{x}(\hat{t}))(\upsilon)\leqslant W(\hat{x}(\hat{t}))$。那么

$$\begin{aligned}D^{-}\phi_\varepsilon(\hat{x}(\hat{t}),\hat{t})(\upsilon,1)&=D^{-}\left[V(\hat{x}(\hat{t}))-V(x_0)-\int_0^{\hat{t}}W(x(s))\mathrm{d}s-\varepsilon\hat{t}\right](\upsilon,1)\\&=D^{-}V(\hat{x}(\hat{t}))(\upsilon)-W(x(\hat{t}))-\varepsilon\\&\leqslant-\varepsilon。\end{aligned}\tag{2.5.7}$$

定义函数

$$y(t)=\begin{cases}\hat{x}(t), & t<\hat{t},\\ \hat{x}(\hat{t})+(t-\hat{t})\upsilon, & t\geqslant\hat{t}。\end{cases}$$

③ 用 · 表示变量以免与前面的 t 混淆。

考虑在 $t\geqslant\hat{t}$ 时，

$$\begin{aligned} d(\dot{y}(t),F(y(t))) &= d(\upsilon,F(\hat{x}(\hat{t})+(t-\hat{t})\upsilon) \\ &\leqslant d(F(\hat{x}(\hat{t})),F(\hat{x}(\hat{t})+(t-\hat{t})\upsilon) \\ &\leqslant l\parallel\upsilon\parallel\parallel t-\hat{t}\parallel。 \end{aligned}$$

在 $\hat{t}$ 处应用定理 2.3.3，那么存在 $x(t)\in S_{[\hat{t},T]}(F,\hat{x}(\hat{t}))$，使得

$$\parallel y(t)-x(t)\parallel\leqslant\int_{\hat{t}}^{t}e^{l(t-s)}l\parallel\upsilon\parallel(s-\hat{t})\mathrm{d}s。$$

为了记号的方便，定义 $\alpha(t-\hat{t})=\int_{\hat{t}}^{t}e^{l(t-s)}l\parallel\upsilon\parallel(s-\hat{t})\mathrm{d}s$，那么容易证明

$$\lim_{t\downarrow\hat{t}}\frac{\alpha(t-\hat{t})}{t-\hat{t}}=0。$$

$\phi_\varepsilon(x(t),t)-\phi_\varepsilon(y(t),t)=V(x(t))-V(y(t))$，那么当 $t\in[\hat{t},T]$ 时，

$$\phi_\varepsilon(x(t),t)\leqslant\phi_\varepsilon(y(t),t)+L\alpha(t-\hat{t})。\tag{2.5.8}$$

根据式(2.5.7)，成立

$$\liminf_{t\downarrow\hat{t}}\frac{\phi_\varepsilon(\hat{x}(\hat{t})+(t-\hat{t})\upsilon,t)-\phi_\varepsilon(\hat{x}(\hat{t}),\hat{t})}{t-\hat{t}}\leqslant-\varepsilon,$$

由于 $\phi_\varepsilon(\hat{x}(\hat{t}),\hat{t})=0$，因此必定存在 $\tilde{t}>\hat{t}$，使得成立

$$\phi_\varepsilon(y(\tilde{t}),\tilde{t})=\phi_\varepsilon(\hat{x}(\hat{t})+(\tilde{t}-\hat{t})\upsilon,\tilde{t})\leqslant-\frac{\varepsilon}{2}(\tilde{t}-\hat{t})$$

和

$$\alpha(t-\hat{t})\leqslant\frac{\varepsilon}{2L}(t-\hat{t}),t\in[\hat{t},\tilde{t}]。$$

注意，前式只是在时刻 $t=\tilde{t}$ 时成立。应用式(2.5.8)，首先可得 $\phi_\varepsilon(x(\tilde{t}),\tilde{t})\leqslant0$；其次，

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon(x(t),t) &\leqslant\phi_\varepsilon(y(t),t)+L\alpha(t-\hat{t}) \\ &=\phi_\varepsilon(\hat{x}(\hat{t})+(t-\hat{t})\upsilon,t)+L\alpha(t-\hat{t}) \\ &\leqslant\phi_\varepsilon(\hat{x}(\hat{t}))+L\parallel\upsilon\parallel(t-\hat{t})+L\alpha(t-\hat{t}) \\ &=L\parallel\upsilon\parallel(t-\hat{t})+L\alpha(t-\hat{t}), \end{aligned}$$

显然在 $t-\hat{t}$ 充分小时，可以使得 $\phi_\varepsilon(x(t),t)\leqslant\varepsilon$。因此只要用这个 $x(t)$，就可以使得 $\theta(x(t))>\hat{t}$。这和 $\hat{t}$ 的定义矛盾。故而 $\hat{t}=T$。

2) 证明(2.5.4)成立

取一列 $\varepsilon_n,\varepsilon_n\downarrow0$。对每个 ε_n，根据 1)中的证明，存在 $x_n(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$，使得 $\phi_{\varepsilon_n}(x_n(t),t)\leqslant\varepsilon_n$。应用本章推论 2.4.1，$\{x_n(t)\}$ 中存在收敛子列，不妨就认为 $x_n(t)\to x(t)$，则 $x(t)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$，且由 $\phi_\varepsilon(x(t),t)$ 的定义式(2.5.6)，可知式(2.5.4)成立。 □

完全类似的方法可以证明下面的定理 2.5.6。我们将证明留给读者。

定理 2.5.6 设存在 $\eta>0$ 和正定的连续函数 $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足 $V(0)=0$ 和 Lipschitz 条件，

且存在负定连续函数 $W:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$。使得对任意的 $x\in\eta B$，存在 $\upsilon\in F(x)$，成立

$$D^- V(x)(\upsilon)\leqslant W(x),$$

那么微分包含(2.5.3)是弱渐近稳定的。 □

练习

1. 证明成立下列关系

 (1) $D^+(f(x)+g(x))\leqslant D^+f(x)+D^+g(x)$。

 (2) $D^+(f(x)+g(x))\geqslant D^+f(x)+D_+g(x)$。

 并建立关于 $D_+(f(x)+g(x))$，$D^-(f(x)+g(x))$ 和 $D_-(f(x)+g(x))$ 的相应结论。

2. 证明如果 $g(x)$ 是可导的，则成立

 $D^+(f(x)g(x))=f(x)\dot{g}(x)+g(x)D^+f(x)$，当 $g(x)\geqslant 0$ 时；

 $D^+(f(x)g(x))=f(x)\dot{g}(x)+g(x)D_+f(x)$，当 $g(x)\leqslant 0$ 时。

 并讨论 $D_+(f(x)g(x))$，$D^-(f(x)g(x))$ 和 $D_-(f(x)g(x))$ 的情形。

3. 设 $f(x)$，$g(x)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，$h(x)=\max(f(x),g(x))$。如果 $D^+f(x)\leqslant 0$，$D^+g(x)\leqslant 0$，证明 $D^+h(x)\leqslant 0$。

4. 证明定理 2.5.1 中的另一个结论

$$D^-f(x(t))(1)=\liminf_{h\downarrow 0}\frac{f(x(t)+hf(x(t)))-f(x(t))}{h}。$$

5. 对 **L** 类函数 β_1 和 β_2 讨论：$\beta_1+\beta_2$，$a\beta_1(a>0)$，$\beta_1(\beta_2(\cdot))$ 中哪些是 **L** 类函数?

6. 如果 $\alpha(t)$ 是 **K** 类函数，$\beta(t)$ 是 **L** 类函数，证明 $\beta(\alpha(t))$ 和 $\alpha(\beta(t))$ 都是 **L** 类函数。

7. 证明定理 2.5.3 可以叙述为：如果存在一个常数 η，存在一个正定的连续函数 $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 与一个 **K** 类函数 α，使得对一切满足 $\|x\|\leqslant\eta$ 和 $\upsilon\in F(x)$ 成立 $D^+V(x)(\upsilon)\leqslant-\alpha(\|x\|)$，那么微分包含式(2.5.3)是强渐近稳定的。

8. 证明定理 2.5.3 可以改成："如果存在一个常数 $\eta>0$，还存在一个正定的连续函数 $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 与一个 **K** 类函数 α，使得对一切满足 $\|x\|\leqslant\eta$ 和 $\upsilon\in F(x)$ 成立

$$D^+V(x)(\upsilon)\leqslant-\alpha(\|x\|),$$

 那么微分包含式(2.5.3)是渐近稳定的。

9. 证明定理 2.5.6。

10. 考虑离散微分包含 $x_{k+1}\in F(x_k)$，$k=0,1,2,\cdots$，其中集合值映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是闭凸值的。设 $0\in F(0)$。称平衡点 0 是弱稳定的，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$，当 $\|x_0\|<\delta$ 时，存在离散微分包含 Cauchy 问题 $x(0)=x_0$ 的一个解，满足 $x_{k+1}\in\varepsilon B$，$k=0,1,2,\cdots$。称平衡点 0 是弱渐近稳定的，如果进一步有 $x_k\to 0$。证明：如果存在一个正定的连续函数 $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，两个常数 $\eta>0$，$\lambda\in(0,1)$，使得当 $\|x\|\leqslant\eta$ 时，

$$\inf_{\upsilon\in F(x)}V(\upsilon)\leqslant\lambda V(\upsilon)$$

 则微分包含是弱渐近稳定的。

 试给出一个弱稳定的条件并证明它。

2.6 单调微分包含

单调是一种比较简单的变化，例如单调序列、单调函数等。许多数学问题是从分析单调现象开始的。本节分析单调微分包含，其中最重要结论是：极大单调微分包含 Cauchy 问题的解是唯一的。从这点看，极大单调微分包含与微分方程非常相似。为了获得这个结论，我们先证明 Minty 定理，然后讨论 Yosida 逼近，由此可以得到极大单调微分包含的解。

2.6.1 单调微分包含及其基本性质

一个单值映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 称为单调的，如果 $x_1>x_2$ 就有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$[①]。经典非线性控制涉及的函数，如阶跃函数、死区非线性、饱和非线性等，都是单调的。为了将定义推广到高维的情形，将上述两个式子合并写成 $(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))\geqslant 0$。在这个不等式中，不再需要条件 $x_1>x_2$。

单值映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 称为单调的，如果 $\langle(x_1-x_2),(f(x_1)-f(x_2))\rangle\geqslant 0$，其中 $\langle x,y\rangle$ 为内积运算，即 $(x_1-x_2)^{\mathrm{T}}(f(x_1)-f(x_2))\geqslant 0$。由此可以进一步来定义**单调集合值映射**。

定义 2.6.1 集合值映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 称为单调的，如果对任意的 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$ 和任意的 $y_1\in F(x_1),y_2\in F(x_2)$，成立 $\langle(x_1-x_2),(y_1-y_2)\rangle\geqslant 0$。进一步，如果对一切 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n,x_1\neq x_2$，成立 $\langle(x_1-x_2),(y_1-y_2)\rangle>0$，则称 F 是严格单调的。

一个单调(严格单调)的集合值映射称为是极大的，如果存在单调集合值映射 $F_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，使得对一切 $x\in\mathbb{R}^n$ 成立 $F_1(x)\supset F(x)$，则 $F_1=F$。 □

可以将定义 2.6.1 限制在一个集合上，例如称 F 在 $A\subset\mathbb{R}^n$ 上是单调的，如果对任意的 $x_1,x_2\in A$ 和任意的 $y_1\in F(x_1),y_2\in F(x_2)$，成立 $\langle(x_1-x_2),(y_1-y_2)\rangle\geqslant 0$。类似地可以定义集合 A 上的极大单调的集合值映射 F。

单调映射有很多良好的性质。例如 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个单调的单值映射，那么总存在单侧极限 $f(x-0)$ 和 $f(x+0)$，并且可以扩展成单调的集合值映射 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，如果定义

$$F(x)=[f(x-0),f(x+0)]。$$

又如，严格单调的单值函数是可逆的，而且它的逆函数必然也是严格单调的；随意一个单调函数 f 未必是可逆的，但是 $f^{-1}(x)$ 是一个单调的集合值映射。这个结论可以推广成任意一个单调的集合值映射的逆也是单调的。

如果 F,G 是两个单调的集合值映射，如果 $\lambda,\mu\geqslant 0$，那么 $\lambda F+\mu G$ 还是单调的。

① 这里说的单调在函数论中一般称为单调递增。

引理 2.6.1　$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是一个集合值映射，那么 F 是单调的充分必要条件是对任意的 $\lambda\geqslant 0$ 和 $y_i\in F(x_i)$，$i=1,2$，成立

$$\|x_1-x_2\|\leqslant\|(x_1-x_2)+\lambda(y_1-y_2)\|。$$

证明：因为

$$\begin{aligned}&\|(x_1-x_2)+\lambda(y_1-y_2)\|^2\\&=\|x_1-x_2\|^2+\lambda^2\|y_1-y_2\|^2+2\lambda\langle(x_1-x_2),(y_1-y_2)\rangle,\end{aligned}$$

如果引理条件成立，那么

$$\lambda^2\|y_1-y_2\|^2+2\lambda\langle(x_1-x_2),(y_1-y_2)\rangle\geqslant 0。\tag{2.6.1}$$

如果$\langle(x_1-x_2),(y_1-y_2)\rangle<0$，那么总存在 $\lambda>0$，使得

$$\lambda\|y_1-y_2\|^2+\langle(x_1-x_2),(y_1-y_2)\rangle<0,$$

这与式(2.6.1)矛盾。因此 F 是单调的。

反之，如果 F 是单调的，那么式(2.6.1)成立，于是 $\|(x_1-x_2)+\lambda(y_1-y_2)\|\geqslant\|x_1-x_2\|$。□

引理 2.6.1 的优势在于引理条件不涉及内积运算，因此有可能将单调映射的理论推广到 Banach 空间。下面的例子给出集合值映射最大和不是最大的区别。

例 2.6.1　考虑下面两个映射

$$F_1(x)=\begin{cases}0.5x+1, & x>0,\\ \{-1,1\}, & x=0,\\ 0.5x-1, & x<0;\end{cases}$$

$$F_2(x)=\begin{cases}0.5x+1, & x>0,\\ [-1,1], & x=0,\\ 0.5x-1, & x<0。\end{cases}$$

它们的图像分别如图 2.15 所示。

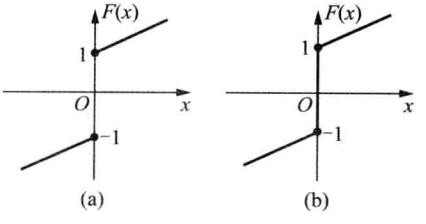


图 2.15　单调的集合值映射

(a) $F_1(x)$的图像；(b) $F_2(x)$的图像

这两个映射都是单调的，$F_1(x)$不是极大的，因为 $F_2(0)\supsetneqq F_1(0)$，但是 $F_2(0)\neq F_1(0)$。而 $F_2(x)$是极大的。□

定义 2.6.1 表明，一个单调集合值映射被称为极大的，如果不存在另一个单调的集合值映射在某一个 $x\in\mathbb{R}^n$处真正包含它。由这个叙述立即可得下面的结论，为了以后引用方便，我们将它写成引理形式。

引理 2.6.2　一个集合值映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是极大单调的，如果有 $u,v\in\mathbb{R}^n$使得对任意的

$(x,y)\in \mathrm{gra}F$，成立$\langle u-x,v-y\rangle\geqslant 0$，那么 $v\in F(u)$。 □

下面的定理给出了极大单调集合值映射的基本性质。

定理 2.6.1 如果集合值映射 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是极大单调的，那么

(1) F 是闭凸值的。

(2) 设 $x_n\to x, y_n\in F(x_n)$，如果对一切 $z\in\mathbb{R}^n$，$\langle y_n,z\rangle\to\langle y,z\rangle$，那么 $y\in F(x)$。

证明：(1) 根据引理 2.6.2，

$$F(x)=\bigcap_{(u,v)\in \mathrm{gra}F}\{y\in\mathbb{R}^n,\langle x-u,y-v\rangle\geqslant 0\}。$$

根据内积的连续性和集合交的性质，$F(x)$是闭集，根据内积的线性，可知它也是凸的。

(2) 对于任意的$(u,v)\in \mathrm{gra}F$，根据 F 是极大单调的，因此$\langle x_n-u,y_n-v\rangle\geqslant 0$，于是$\langle x_n-u,y_n-v\rangle\to\langle x-u,y-v\rangle$，于是由$\langle x_n-u,y_n-v\rangle\geqslant 0$ 得到$\langle x-u,y-v\rangle\geqslant 0$，应用引理 2.6.2，$y\in F(x)$。 □

注 上述引理 2.6.1，引理 2.6.2 和定理 2.6.1 都可以推广到一般的 Hilbert 空间。只是要将定理 2.6.1 中的条件$\mathbb{R}^n$换成 H，将“对一切 $z\in H,\langle y_n,z\rangle\to\langle y,z\rangle$”改为 y_n 弱收敛到 y。而在有限维的情形，弱收敛和强收敛是一致的。 □

2.6.2 Minty 定理

设$\{\Omega_\lambda\}$是一族集合，如果对任意有限多个$\{\Omega_{\lambda_1},\cdots,\Omega_{\lambda_n}\}$，它们的交集$\bigcap_{k=1}^{n}\Omega_{\lambda_k}$非空，那么称$\{\Omega_\lambda\}$具有有限交性质。在拓扑学中有这样的定理：设$\{\Omega_\lambda\}$是紧集 K 中一族闭集合，并且具有有限交性质，那么$\bigcap\Omega_\lambda$ 非空。这个定理等价于有限覆盖定理。下面我们用这个结论来证明一个引理，它将用于证明本小节的主要结论。

引理 2.6.3 设 S 和 K 是$\mathbb{R}^n$中的两个子集，其中 K 是紧的，$\phi:K\times S\to\mathbb{R}$ 的单值映射。如果对任意的 $y_0\in S$，$\phi(x,y_0)$是下半连续的单值映射，记 M 为 S 中所有有限集组成的族，那么存在一个 $\bar{x}\in K$，使得

$$\sup_{y\in S}\phi(\bar{x},y)\leqslant v=\sup_{E\in M}\inf_{x\in K}\max_{y\in E}\phi(x,y)。$$

证明：对每个 $y\in S$，定义集合 $\Omega_y=\{x\in K,\phi(x,y)\leqslant v\}$。从 v 的定义知道 $\Omega_y\neq\varnothing$，而且由于对每个 $y_0\in S$，$\phi(x,y_0)$是下半连续的，因此 Ω_y 是闭的，而 K 是紧的，从而 Ω_y 也是紧的。

记 $\phi(x,E)=\max_{y\in E}\phi(x,y)$，注意当 E 取定之后，$\phi(x,E)$是 $x\in K$ 的函数；那么可以证明 $\phi(x,E)$也是下半连续的(参见 1.4 节)。$\phi(x,E)$具有性质，对任意的 $x\in K$ 和 $y_i\in E$，$\phi(x,E)\geqslant\phi(x,y_i)$。由于 K 是紧的，所以$\min_{x\in K}\phi(x,E)=\inf_{x\in K}\phi(x,E)$和存在 $\bar{x}_E\in K$，使得因此 $\phi(\bar{x}_E,E)=\min_{x\in K}\phi(x,E)=\inf_{x\in K}\phi(x,E)\leqslant v$。进一步 $\phi(\bar{x}_E,y_i)\leqslant\phi(\bar{x}_E,E)\leqslant v$，所以 $\bar{x}_E\in\bigcap_{y\in E}\Omega_y$，也就是对任意的有限集 E，$\bigcap_{y\in E}\Omega_y\neq\varnothing$。所以 Ω_y 在 K 中具有有限交性质，K 紧，所以$\bigcap_{y\in S}\Omega_y\neq\varnothing$，即存在 $\bar{x}\in\bigcap_{y\in S}\Omega_y$，根据 Ω_y 的定义，对这个 $\bar{x}$ 成立 $\phi(\bar{x},y)\leqslant v, y\in S$。 □

在图 2.16 中，设 $E=\{y_1,y_2,y_3\}$，图中三条细的曲线分别表示了 $\phi(x,y_1),\phi(x,y_2)$和

$\phi(x,y_3)$；图中的粗曲线就是 $\phi(x,E)$。如果 $S=E$，图中标出的 v 和 $\bar{x}$ 就满足要求。

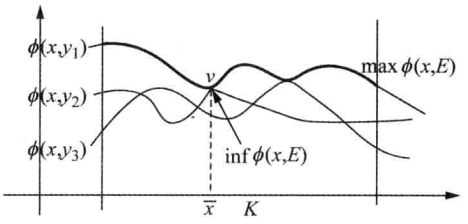


图 2.16　$\inf\max\phi(x,y_i)$的示意图

引理 2.6.4　设 K 是$\mathbb{R}^n$中的凸紧集，如果 $\phi:K\times K\to\mathbb{R}$ 满足：

(1) 对任意给定的 $y\in K$，$\phi(\cdot,y)$是下半连续函数；

(2) 对任意给定的 $x\in K$，$\phi(x,\cdot)$是凹函数(就是$-\phi(x,\cdot)$是凸函数)；

(3) 对任意的 $y\in K$，$\phi(y,y)\leqslant 0$；

那么存在 $\bar{x}\in K$，使得 $\phi(\bar{x},y)\leqslant 0$ 对一切 $y\in K$ 成立。　□

引理 2.6.4 称为 Fan Ky 不等式，其证明用到 1 的分解和不动点定理。本书不打算给出它的证明，只是指出在一般的 Banach 空间，这个结论依然成立。[8]

上述两个引理用来证明集合值映射中的一个重要结论，它被称为 **Minty 定理**。定理中的 1 代表恒等映射。

定理 2.6.2　设 F 是一个单调的集合值映射，F 是极大的充分必要条件是 $1+F$ 是满射。

证明：必要性。就是要证明对于任意的 $y\in\mathbb{R}^n$存在$x\in\mathbb{R}^n$，使得 $y\in x+F(x)$。实际上只要证明对任意一个极大单调的集合值映射 A，总存在一个与 A 有关的 x，使得 $0\in x+A(x)$。因为如果结论成立，只要取 $A=-y+F$，根据本节练习 2，A 也是极大单调的，因此有 $0\in x+A(x)=x-y+F(x)$，即 $y\in x+F(x)$。

要证明 $0\in x+A(x)$，就是$-x\in A(x)$，根据引理 2.6.1，只要证明对任意的$(u,v)\in \mathrm{gra}A$，$(x-u,-x-v)\geqslant 0$，或者$(x-u,x+v)\leqslant 0$。定义连续函数 $\phi(x,(u,v))$②如下：

$$\phi(x,(u,v))=\langle x-u,x+v\rangle=\|x\|^2+\langle x,v-u\rangle-\langle u,v\rangle。\tag{2.6.2}$$

对任意给定的 $u_0\in\mathbb{R}^n$，任取 $v_0\in A(u_0)$，定义集合 $\Omega_{(u_0,v_0)}=\{x;\phi(x,(u_0,v_0))\leqslant 0\}$，因为 $u_0\in\Omega_{(u_0,v_0)}$，所以 $\Omega_{(u_0,v_0)}$为$\mathbb{R}^n$中的非空紧集。在$\mathbb{R}^n$中取 m 个 u_i，$i=1,2,\cdots,m$，然后再取定 $v_i\in A(u_i)$。定义 $K=\overline{\mathrm{co}}\{u_i;i=1,2,\cdots,m\}$③，那么 K 是凸紧集。

为了证明对给定的 $x\in K$，$\phi(x,(u,v))$关于(u,v)是凹的，考虑

$$\nabla(-\phi)=-\frac{\partial\phi}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}[u^{\mathrm{T}}(x+v)]=(x+v)^{\mathrm{T}},$$

由于 $v\in A(u)$，而 A 是单调的，因此对任意的 $u_1,u_2\in\mathbb{R}^n$，$\langle(u_2-u_1),A(u_2)-A(u_1)\rangle\geqslant 0$，

$$\langle(u_2-u_1),\nabla(-\phi)(u_2)-\nabla(-\phi)(u_1)\rangle=\langle(u_2-u_1),A(u_2)-A(u_1)\rangle\geqslant 0。$$

② 在记号 $\phi(x,(u,v))$中，v 不是独立变化的，$v\in A(u)$。因此 u 为自变量，v 可以作为参数看待。

③ 特别总可以使得 $m=n$，$\{u_i;i=1,2,\cdots,n\}$是线性无关集合，这时，$\mathrm{int}K\neq\varnothing$。

应用定理 1.3.3 的结论(2),$-\phi$ 是凸的。

为了应用引理 2.6.4,最后只要证明 $\phi(u,(u,v))\leqslant 0$。用 $M=\{(u_j,v_j),j=1,2,\cdots,m\}$,其中 $v_j\in A(u_j)$,M 是 graA 中的一个有限集,由引理 2.6.3,存在 $\bar{x}\in K$,使得

$$\begin{aligned}\sup_{(u,v)\in \mathrm{gra}A}\phi(\bar{x},(u,v)) &\leqslant \sup_{M\subset \mathrm{gra}A}\inf_{x\in K}\max_{(u_j,v_j)\in M}\phi(x,(u_j,v_j))\\ &\leqslant \sup_{M\subset \mathrm{gra}A}\inf_{x\in K}\max_{\lambda\in\Lambda}\sum_j\lambda_j\phi(x,(u_j,v_j)),\end{aligned}\tag{2.6.3}$$

其中 $\Lambda=\left\{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m);\sum_{j=1}^m\lambda_j=1,\lambda_j\geqslant 0\right\}$。剩下只要证明式(2.6.3)的右端不大于 0。

由于 $x\in K=\overline{\mathrm{co}}\{u_1,\cdots,u_m\}$,因此存在 $\mu\in\Lambda$,使得 $x=\sum_{k=1}^m\mu_k u_k$。这样 $\sum_j\lambda_j\phi(x,(u_j,v_j))=\sum_j\lambda_j\phi\left(\sum_k\mu_k u_k,(u_j,v_j)\right)$ 只是 λ 和 μ 的函数,所以可以定义

$$\phi_M(\mu,\lambda)=\sum_j\lambda_j\phi\left(\sum_k\mu_k u_k,(u_j,v_j)\right)。$$

从而式(2.6.3)成为

$$\sup_{(u,v)\in \mathrm{gra}A}\phi(\bar{x},(u,v))\leqslant \sup_{M\subset \mathrm{gra}A}\inf_{\mu\in\Lambda}\max_{\lambda\in\Lambda}\phi_M(\mu,\lambda)。\tag{2.6.4}$$

根据 $\phi(x,(u,v))$的原始定义:

$$\begin{aligned}\phi\left(\sum_k\mu_k u_k,(u_j,v_j)\right)&=\left\langle\sum_k\mu_k u_k-u_j,\sum_k\mu_k u_k+v_j\right\rangle\\ &=\sum_k\mu_k\left\langle u_k-u_j,\sum_k\mu_k u_k+v_j\right\rangle\\ &=\sum_k\mu_k\left(\langle u_k-u_j,v_j\rangle+\left\langle u_k-u_j,\sum_k\mu_k u_k\right\rangle\right),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\phi_M(\mu,\lambda)&=\sum_j\lambda_j\phi\left(\sum_k\mu_k u_k,(u_j,v_j)\right)\\ &=\sum_j\lambda_j\sum_k\mu_k\langle u_k-u_j,v_j\rangle+\sum_j\lambda_j\sum_k\mu_k\left\langle u_k-u_j,\sum_k\mu_k u_k\right\rangle。\end{aligned}$$

当 $\lambda=\mu$ 时,$\phi_M(\mu,\mu)$的第二项为

$$\sum_{j,k=1}^m\mu_j\mu_k\left\langle u_k-u_j,\sum_k\mu_k u_k\right\rangle=0,$$

原因是 $\mu_j\mu_k\left\langle u_k-u_j,\sum_k\mu_k u_k\right\rangle$和 $\mu_k\mu_j\left\langle u_j-u_k,\sum_k\mu_k u_k\right\rangle$都出现在和式中,它们的和为 0。$\phi_M(\mu,\mu)$的第一项为

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^m\mu_j\mu_k\langle u_k-u_j,v_j\rangle&=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^m\mu_j\mu_k\langle u_k-u_j,v_j\rangle+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^m\mu_j\mu_k\langle u_k-u_j,v_j\rangle\\ &=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^m\mu_j\mu_k\langle u_k-u_j,v_j\rangle+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^m\mu_k\mu_j\langle u_j-u_k,v_k\rangle\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m}\mu_j\mu_k\langle u_k-u_j,v_j-v_k\rangle$$
$$\leqslant 0,$$

最后的不等式应用了 A 的单调性。于是 $\phi_M(\mu,\mu)\leqslant 0$。应用引理 2.6.4，存在 $\bar{\mu}\in\Lambda$，使得对一切 $\lambda\in\Lambda$，$\phi_M(\bar{\mu},\lambda)\leqslant 0$。

进一步有 $\inf\limits_{\mu\in\Lambda}\max\limits_{\lambda\in\Lambda}\sum\limits_j\phi_M(\mu,\lambda)\leqslant\max\limits_{\lambda\in\Lambda}\sum\limits_j\phi_M(\bar{\mu},\lambda)\leqslant 0$。因为 M 是任意的，所以式(2.6.4)的右面不大于 0，这样 $\phi(\bar{x},(u,v))\leqslant 0$ 对任意的 $(u,v)\in \mathrm{gra}A$ 成立。

充分性。设 F 是单调的集合值映射，就是要证明如果 $1+F$ 是满射则 F 是极大的。只要证明当 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$，$y_1\in F(x_1)$ 时，由 $\langle y_1-y_2,x_1-x_2\rangle\geqslant 0$，能导出 $y_2\in F(x_2)$，则由引理 2.6.2，F 是极大的。

由于 $1+F$ 是满射，因此存在 $x_0\in\mathbb{R}^n$，使得 $y_2+x_2\in x_0+F(x_0)$，就是存在 $y_0\in F(x_0)$，使得 $y_2+x_2=x_0+y_0$。考察

$$\|y_2-y_0\|^2=\langle y_2-y_0,y_2-y_0\rangle=-\langle y_2-y_0,x_2-x_0\rangle\leqslant 0,$$

最后不等式是因为 $y_0\in F(x_0)$ 和定理的假定。于是 $y_2=y_0$，进一步 $x_2=x_0$，即 $y_2\in F(x_2)$。□

对于极大单调来说，定理 2.6.2 揭示了它的本质特征。

2.6.3　Yosida 逼近

这一小节，我们试图找到一串单值映射来逼近极大单调的集合值映射，这是极大单调的另一个重要特征。

在集合值范围内，一个满的单值映射总是可逆的，因此如果 A 是一个极大单调集合值映射，那么对任意的 $\lambda>0$ 可以定义 $1+\lambda A$ 的逆映射。

定义 2.6.2　设 A 是极大单调的集合值映射，$\lambda>0$，定义 $J_\lambda=(1+\lambda A)^{-1}$ 为 A 关于 λ 的**预解式**，定义 $A_\lambda=\frac{1}{\lambda}(1-J_\lambda)$④为 A 关于 λ 的 **Yosida 逼近**。□

下面的定理给出了 J_λ 的基本特性。

定理 2.6.3　如果 A 是极大单调的集合值映射，$\lambda>0$，则预解式 J_λ 是单值映射，而且其 Lipschitz 常数为 1。

证明：设 $y_1,y_2\in\mathbb{R}^n$，则存在 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$，使得 $y_i\in x_i+\lambda A(x_i)$，$i=1,2$，就是 $x_i\in J_\lambda(y_i)$。又存在 $v_i\in A(x_i)$，满足 $y_i=x_i+\lambda v_i$。那么 $y_1-y_2=x_1-x_2+\lambda(v_1-v_2)$。

$$\begin{aligned}\|y_1-y_2\|^2&=\|x_1-x_2\|^2+\lambda^2\|v_1-v_2\|^2+2\lambda\langle x_1-x_2,v_1-v_2\rangle\\&\geqslant\|x_1-x_2\|^2+\lambda^2\|v_1-v_2\|^2.\end{aligned}\tag{2.6.5}$$

由式(2.6.5)，$\|x_1-x_2\|\leqslant\|y_1-y_2\|$。当 $y_1=y_2$ 时，$x_1=x_2$。即对给定的 y 只有唯一

④　为了区别逆映射，分数总用 $\frac{a}{b}$ 来表示。

的 x，使得 $x\in J_\lambda(y)$，或者说 J_λ 是单值映射。这样 $\|J_\lambda(y_1)-J_\lambda(y_2)\|=\|x_1-x_2\|\leqslant\|y_1-y_2\|$，$J_\lambda$ 是 Lipschitz 单值映射，并且其 Lipschitz 常数为 1。 □

根据 J_λ 与 A_λ 的关系，立即可以有下列结论。

推论 2.6.1 A 的 Yosida 逼近 A_λ 具有下列性质。

(1) A_λ 是单值映射。

(2) A_λ 是 Lipschitz 映射，其 Lipschitz 常数为 $\frac{1}{\lambda}$。

(3) 对一切 $x\in\mathbb{R}^n$，$A_\lambda(x)\in A(J_\lambda(x))$。

(4) A_λ 是极大单调的。

证明：(1) 因为 $A_\lambda=\frac{1}{\lambda}(1-J_\lambda)$，$J_\lambda$ 是单值映射，所以 A_λ 也是单值映射。

(2) 沿用定理 2.6.3 证明中的记号，$x=J_\lambda(y)$，$\frac{1}{\lambda}(y-x)=v$，则 $v\in A(x)$。因为 $A_\lambda(y)=\frac{1}{\lambda}(1-J_\lambda)y=\frac{1}{\lambda}(y-x)$，所以，$A_\lambda(y)=v$。进一步，取 $i=1,2$，$v_i=A_\lambda(y_i)$。由式(2.6.5)

$$\|y_1-y_2\|^2\geqslant\lambda^2\|v_1-v_2\|^2=\lambda^2\|A_\lambda(y_1)-A_\lambda(y_2)\|^2,$$

所以 A_λ 的 Lipschitz 常数为 $\frac{1}{\lambda}$。

(3) 由于 $1\in(1+\lambda A)(1+\lambda A)^{-1}=(1+\lambda A)J_\lambda$，因此对任意的 x，$x\in(1+\lambda A)J_\lambda(x)=J_\lambda(x)+\lambda A(J_\lambda(x))$；另一方面，因为 $\lambda A_\lambda+J_\lambda=1$，即 $x=J_\lambda(x)+\lambda A_\lambda(x)$，所以比较两者可得 $A_\lambda(x)\in A(J_\lambda(x))$。

(4) 只要证明 A_λ 是单调的，那么由本节练习 1，它必然是极大的。考察

$$\begin{aligned}&\langle A_\lambda(y_1)-A_\lambda(y_2),y_1-y_2\rangle\\&=\langle A_\lambda(y_1)-A_\lambda(y_2),J_\lambda(y_1)-J_\lambda(y_2)\rangle+\lambda\|A_\lambda(y_1)-A_\lambda(y_2)\|^2\end{aligned}$$

其中利用了 $y=\lambda A_\lambda(y)+J_\lambda(y)$。再因 $A_\lambda(x)\in A(J_\lambda(x))$，而 A 是单调的，因此上式的第一项非负，而第二项自然非负，所以 $\langle A_\lambda(x_1)-A_\lambda(x_2),x_1-x_2\rangle\geqslant 0$，$A_\lambda$ 是单调的。 □

回忆 $m(A(x))$ 是 $A(x)$ 的最小范元，即 0 在 $A(x)$ 上的投影。下面的定理给出 A_λ 与最小范元的关系，这些关系在进一步的讨论中要用到。

定理 2.6.4 设 A 是极大单调的，那么，对一切 $x\in\mathbb{R}^n$：

(1) $\|m(A(x))-A_\lambda(x)\|^2\leqslant\|m(A(x))\|^2-\|A_\lambda(x)\|^2$；

(2) $\lim\limits_{\lambda\to 0}J_\lambda(x)=x$；

(3) $\lim\limits_{\lambda\to 0}A_\lambda(x)=m(A(x))$。

证明：(1) 考察

$$\begin{aligned}&\|m(A(x))-A_\lambda(x)\|^2\\&=\|m(A(x))\|^2+\|A_\lambda(x)\|^2-2\langle A_\lambda(x),m(A(x))\rangle\\&=\|m(A(x))\|^2-\|A_\lambda(x)\|^2-2\langle A_\lambda(x),m(A(x))-A_\lambda(x)\rangle,\end{aligned}$$

我们断言$\langle A_\lambda(x), m(A(x))-A_\lambda(x)\rangle=\frac{1}{\lambda}\langle x-J_\lambda(x), m(A(x))-A_\lambda(x)\rangle\geqslant 0$，因为 A 是单调的，而 $m(A(x))\in A(x), A_\lambda(x)\in A(J_\lambda(x))$。结论获证。

(2) 由结论 1，$\| x-J_\lambda(x)\| =\lambda\| A_\lambda(x)\| \leqslant\lambda\| m(A(x))\|$，所以

$$\lim_{\lambda\to 0}J_\lambda(x)=x。\tag{2.6.6}$$

(3) 对给定的 $x\in\mathbb{R}^n$，考虑从关系 $y\in A(x-\lambda y)$ 中解出 y。由于 $J_\lambda(x)=x-\lambda A_\lambda(x)$，设 $y=A_\lambda(x)$，则 $x-\lambda y=J_\lambda(x)$，两边作用 A，得 $A(x-\lambda y)=A(J_\lambda(x))$。而 $A_\lambda(x)\in A(J_\lambda(x))$，得到$y=A_\lambda(x)$是这个关系的一个解。反之，对任意一个解 y，定义 $z=x-\lambda y$，则 $y\in A(z)$，用前式代入，得 $x\in z+\lambda A(z)$，就是 $z=J_\lambda(x)$，即 $y=A_\lambda(x)$。这说明 $y=A_\lambda(x)$是关系 $y\in A(x-\lambda y)$ 的唯一解。

因此对任意给定的两个 $\lambda,\mu>0$，$y=A_{\lambda+\mu}(x)$是 $y\in A(x-(\lambda+\mu)y)$的唯一解。另一方面，$y\in A(x-(\lambda+\mu)y)=A((x-\mu y)+\lambda y)$，所以它也是 $y\in A_\lambda(x-\mu y)$的唯一解。

如果设$(J_\lambda)_\mu=(1+\mu A_\lambda)^{-1}$，$(A_\lambda)_\mu=\frac{1}{\mu}(1-(J_\lambda)_\mu)$，那么重复上述过程可以得到 $y=(A_\lambda)_\mu(x)$是 $y\in A_\lambda(x-\mu y)$的唯一解。因此 $A_{\lambda+\mu}(x)=(A_\lambda)_\mu(x)$对一切 $x\in\mathbb{R}^n$成立。

将 $A_{\lambda+\mu}(x)$看成是$(A_\lambda)_\mu(x)$，应用本定理的结论(1)，得到

$$\| A_{\mu+\lambda}(x)-A_\lambda(x)\|^2\leqslant\| A_{\mu+\lambda}(x)\|^2-\| A_\lambda(x)\|^2,$$

其中用 $A_\lambda(x)$代替了 $m(A_\lambda(x))$，这是可行的，因为 $A_\lambda(x)$是单值映射。从此不等式可以看出，对给定的 x，$\| A_\lambda(x)\|^2$ 是 λ 的单调递增函数，其上界为 $\| m(A(x))\|^2$，所以 $\| A_\lambda(x)\|$ 收敛，从而它是 Cauchy 序列。再次应用结论(1)，$\| A_{\lambda+\mu}(x)-A_\lambda(x)\|^2\leqslant\| A_{\lambda+\mu}(x))\|^2-\| A_\lambda(x)\|^2$，所以 $A_\lambda(x)$也是 Cauchy 序列，所以存在 $v_x=\lim\limits_{\lambda\to 0}A_\lambda(x)\in\lim\limits_{\lambda\to 0}A(J_\lambda(x))=A(x)$。

又由于 $A(x)$是闭凸的，因此 $m(A(x))$唯一，它还是 $A(x)$中范数最小的元素，所以 $v_x=m(A(x))$。 □

将$(x,A_\lambda(x))$写成$(x,A_\lambda(x))=(J_\lambda(x),A_\lambda(x))+(x-J_\lambda(x),0)$，由于$(J_\lambda(x),A_\lambda(x))\in(J_\lambda(x),A(J_\lambda(x))$和$\| x-J_\lambda(x)\|\leqslant\lambda\| m(A(x))\|$，因此$(x,A_\lambda(x))\in\mathrm{gra}A+\lambda\| mA(x)\| B$。这说明 $A_\lambda(x)$是集合值映射 $A(x)$的一种近似选择。

2.6.4　极大单调微分包含

本小节要利用极大单调的 Yosida 逼近来证明极大单调微分包含解的唯一性。我们先叙述有关弱收敛的两个基本结论。

引理 2.6.5　设 X 是 Hilbert 空间，$x_n\in X, n=1,2,\cdots$，如果 x_n 弱收敛到 x_0，那么

(1) $\| x_0\|\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\| x_n\|$。

(2) 如果进一步有$\lim\limits_{n\to\infty}\| x_n\|=\| x_0\|$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}\| x_n-x_0\|=0$，即 x_n 强收敛到 x_0。

证明：(1) 因为 $\| x_0\|^2=\lim\limits_{n\to\infty}\langle x_n,x_0\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}\| x_0\|\| x_n\|\cos\theta_n$，其中 θ_n 是 x_0 和 x_n 之间的

夹角。因为 $\| x_n \| \cos\theta_n \leqslant \| x_n \|$，所以 $\| x_0 \| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \| x_n \|$。

(2) 因为 $\| x_n - x \|^2 = \langle x_n - x_0, x_n - x_0 \rangle = \langle x_n, x_n - x_0 \rangle - \langle x_0, x_n - x_0 \rangle$，其中第二项趋向0。考察第一项，$\langle x_n, x_n - x_0 \rangle = \langle x_n, x_n \rangle - \langle x_n, x_0 \rangle \to \| x_n \|^2 - \| x_0 \|^2 = 0$。 □

设 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为极大单调的集合值映射。考虑下面微分包含的 Cauchy 问题

$$\dot{x}(t) = -A(x(t)), x(0) = x_0。 \tag{2.6.7}$$

定理 2.6.5 微分包含(2.6.7)的解存在而且唯一。进一步用 $x(t)$ 表示它的解，那么 $x(t)$ 满足：对几乎所有的 $t \in [0, \infty)$，

$$\dot{x}(t) = -m(A(x(t)))； \tag{2.6.8}$$

并且 $x(t)$ 还满足：

(1) $\| \dot{x}(t) \|$ 是单调递减函数；

(2) $x(t)$ 的右导数 $x'(t) = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}$ 是右连续的；

(3) 如果用 $x_i(t)$，$i=1,2$，表示式(2.6.7)满足初始条件 $x_i(0) = x_{i0}$ 的两个解，那么

$$\| x_1(t) - x_2(t) \| \leqslant \| x_1(0) - x_2(0) \| \tag{2.6.9}$$

对一切 $t \in [0, \infty)$ 成立。

说明：定理 2.6.5 中采用的是 $\mathbb{R}^n$ 中的范数，因此 $\| \dot{x}(t) \|$ 和 $\| x_1(t) - x_2(t) \|$ 都是 t 的函数。又，满足 $\dot{x}(t) = -m(A(x(t)))$ 的解通常称为**缓解**。

证明：先证明最后的结论(3)。由于 A 是单调的，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{2} \| x_1(t) - x_2(t) \|^2 = \langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t), x_1(t) - x_2(t) \rangle \leqslant 0,$$

于是对任意的 $t \in [0, \infty)$，成立

$$0 \geqslant \int_0^t \langle \dot{x}_1(\tau) - \dot{x}_2(\tau), x_1(\tau) - x_2(\tau) \rangle \mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2} (\| x_1(t) - x_2(t) \|^2 - \| x_1(0) - x_2(0) \|^2)。$$

结论获证。这一结论直接蕴含微分包含(2.6.7)Cauchy 问题解的唯一性。

再证明结论(1)。记 $y(t) = x(t+h)$，考虑微分包含的 Cauchy 问题

$$\dot{y}(t) = -A(y(t)), \quad y(0) = x(h)。$$

由式(2.6.9)得到

$$\left\| \frac{y(t) - x(t)}{h} \right\| \leqslant \left\| \frac{y(0) - x(0)}{h} \right\|,$$

就是

$$\left\| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right\| \leqslant \left\| \frac{x(h) - x(0)}{h} \right\|。$$

两边取极限 $h \to 0$，即得 $\| \dot{x}(t) \| \leqslant \| \dot{x}(0) \|$ 在导数存在处成立。由于任意两个 t_0 和 $t_0 + t$ 都可以进行类似的比较，因此 $\| \dot{x}(t) \|$ 是不增的。获证。

现在证明解的存在性。由于 A 是极大单调的，因此 $A(x)$ 是凸闭值的。考虑微分方程的

Cauchy 问题：

$$\dot{x}_\lambda(t) = -A_\lambda(x_\lambda(t)), x_\lambda(0) = x_0。$$

根据定理 2.6.4，$-A_\lambda$ 是 Lipschitz 的单值映射，所以它的解唯一存在。根据结论(1)，$\| \dot{x}_\lambda(t) \|$ 是单调递减的。所以 $\| \dot{x}_\lambda(t) \| \leqslant \| \dot{x}_\lambda(0) \| = \| A_\lambda(x_0) \| \leqslant \| m(A(x_0)) \|$，这说明将 λ 作为指标，$\{x_\lambda(t)\}$是等度的绝对连续函数序列。根据连续函数空间紧集的特征，对任何 $T>0$，在闭区间$[0,T]$上，$\{x_\lambda(t)\}$存在收敛子列，不妨认为$\{x_\lambda(t)\}$就是收敛的，即存在绝对连续单值映射 $x(t)$，使得$\lim\limits_{\lambda\to 0} x_\lambda(t)=x(t)$一致地成立。这蕴含 $x(t)$几乎处处可导，而且$\dot{x}_\lambda(t)\to\dot{x}(t)(\lambda\to 0)$。

定义 $\mathscr{A}: x_\lambda(t)\to A_\lambda(x_\lambda(t))$，可以证明 $\mathscr{A}$ 是 $L^2[0,T]$到 $L^2[0,T]$的极大单调⑤，现在 $x_\lambda(t)\to x(t)$，$A_\lambda(x_\lambda(t))\to\dot{x}(t)$，根据定理 2.6.1 的结论(2)，$\dot{x}(t)\in\mathscr{A}(x(t))=A(x(t))$。

为了证明式(2.6.8)，我们先证明 $\| m(A(x(t)) \|$ 在$[0,T]$上是单调递减的。由结论(1)，$\| A_\lambda(x_\lambda(t)) \| \leqslant \| m(A(x_0)) \|$，因此序列$\{A_\lambda(x_\lambda(t))\}$有界，由定理 1.1.7 及定理 2.6.4，即知它存在弱收敛的子列。不妨假定$\{A_\lambda(x_\lambda(t))\}$就是弱收敛的，设它弱收敛到 $v(t)$。因 $A_\lambda(x_\lambda(t))\in A(J_\lambda(x_\lambda(t)))$，而 $J_\lambda(x_\lambda(t))\to x(t)$，$(\lambda\to 0)$，所以由定理 2.6.1 的结论(2)，$v(t)\in A(x(t))$。进一步根据 $m(A(x(t)))$的定义，有 $\| v(t) \| \geqslant \| m(A(x(t))) \|$。

另一方面，因为 $v(t)$是$\{A_\lambda(x_\lambda(t))\}$的弱极限，因此由引理 2.6.5，

$$\begin{aligned} \| m(A(x(t))) \| &\leqslant \| v(t) \| \\ &\leqslant \liminf_{\lambda\to 0} \| A_\lambda(x_\lambda(t)) \| \\ &\leqslant \| m(A(x_0)) \|。 \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

就是 $\| m(A(x(t))) \| \leqslant \| m(A(x_0)) \| = \| m(A(x(0))) \|$，这蕴含 $\| m(A(x(t)) \|$ 在$[0,T]$上单调递减。

现在证明 $\| m(A(x(t)) \|$ 在$[0,T]$上是右连续的。即如果 $t_n\downarrow t_0$，要证明 $m(A(x(t_n)))\to m(A(x(t_0)))$。沿用上面证明中的记号，

$$\| m(A(x(t_n))) \| \leqslant \| v(t_n) \| \leqslant \| m(A(x(t_0))) \|,$$

于是存在 $m(A(x(t_n)))$的一个子列，它弱收敛于某个向量 v_0。设 $m(A(x(t_n)))$就弱收敛到 v_0，与上面的证明相同，可得 $v_0\in A(x_0)$。与式(2.6.10)类似，得到

$$\begin{aligned} \| m(A(x_0)) \| &\leqslant \| v_0 \| \\ &\leqslant \liminf_{\lambda\to 0} \| m(A(x(t_n)) \| \\ &\leqslant \| m(A(x(t_0))) \| \\ &= \| m(A(x_0)) \|, \end{aligned}$$

结合 $v_0\in A(x_0)$，即得 $v_0=m(A(x_0))$。注意到 $t_n\downarrow t_0$，而由前面证明，$\| m(A(x(t)) \|$ 是单调递减的，因此，$\| m(A(x(t_n)) \|$ 是单调递增的，其极限必然存在，所以$\liminf\limits_{n\to\infty} \| m(A(x(t_n))) \| =$

⑤ 这里的极大单调是在 $L^2[0,T]$上考虑的，因此需要将引理 2.6.1 和定理 2.6.1 推广到无限维空间。可以证明引理 2.6.1 和定理 2.6.1 在任意 Hilbert 空间上均成立。读者可以参考文献[9]。读者可能也注意到，随后的应用与定理 2.6.1 也有所不同，这里极限是 $\lambda\to 0$，而不是 $n\to\infty$。但是这些差异并不是本质的。

$\lim\limits_{n\to\infty}\| m(A(x(t_n)))\|$，进一步$\lim\limits_{n\to\infty}\| m(A(x(t_n)))\| = \| m(A(x_0))\|$。应用引理 2.6.4，$m(A(x(t_n))$强收敛到$m(A(x_0))$，即$\| m(A(x(t))\|$在$[0,T]$上是右连续的。

最后，对几乎所有的$t\in[0,T]$和$h>0$，

$$\| x(t+h)-x(t)\| = \left\| \int_t^{t+h} \dot{x}(\tau)\mathrm{d}\tau \right\| \leqslant \int_t^{t+h} \| \dot{x}(\tau)\| \mathrm{d}\tau \leqslant h\| m(A(x(t)))\|,$$

最后的不等式中应用了$\| m(A(x(t)))\|$单调递减这个事实。因为$\| \dot{x}(t)\|$是右连续的，当$h\downarrow 0$时，$\left\| \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \right\| \to \| \dot{x}(t)\|$，所以$\| \dot{x}(t)\| \leqslant \| m(A(x(t)))\|$。进一步，$\dot{x}(t)\in -A(x(t))$，所以$\dot{x}(t)=-m(A(x(t)))$。 □

练习

1. 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是单值的单调映射，证明如果它是连续的则它是极大的。
2. 如果$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是极大单调的，证明：
 (1) 对于任意一个$y_0\in\mathbb{R}^n$，y_0+F还是极大单调的。
 (2) $\alpha>0$是任意的正实数，则αF还是极大单调的。
3. 证明集合值映射$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是单调的充分必要条件是$F^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是单调的。
4. 如果$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是凸映射，那么它的次微分$\partial F(x)$是单调的。
5. 试证明定理 2.6.2 中的$\{x;\phi(x,(u,v))\leqslant 0\}$是凸紧集。
6. 证明：如果$V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}(\infty)$是下半连续的凸函数，那么$\partial V(x)$是极大单调的。并且$\dot{x}(t)=-\partial V(x)$，$x(0)=x_0$的解满足$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t))+\| \dot{x}(t)\|^2=0$。

第3章

凸过程

本章和下面的两章讨论几类微分包含系统及其控制问题。正如很多数学理论从最简单的情形开始一样，这里讨论的微分包含都和“线性”有着这样那样的联系。本章先考虑凸过程，读者将会看到它是线性映射在集合值映射的一种合理的推广，后面两章将分别讨论线性多胞体和 Luré 系统。

3.1 线性赋范空间上的凸过程

本节讨论一般线性赋范空间上的凸过程，目的是将 Banach 空间的基本定理推广到集合值

映射，下一节再讨论有限维线性空间。

3.1.1 凸过程及其伴随过程

为了便于对照，先给出线性赋范空间中线性有界（单值）映射的一些结论。

设 X 和 Y 是两个线性赋范空间，$A:X\to Y$ 称为是从 X 到 Y 的线性映射，如果它满足：

(1) 对任意的 $x_1,x_2\in X$，$A(x_1+x_2)=A(x_1)+A(x_2)$；

(2) $x\in X,\alpha\in\mathbb{R}$，$A(\alpha x)=\alpha A(x)$。

从 X 到 Y 线性有界映射全体组成的空间记成 $\mathcal{L}(X,Y)$，根据范数

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|A(x)\|}{\|x\|},$$

$\mathcal{L}(X,Y)$也是一个线性赋范空间。特别当 Y 是实数域时，$\mathcal{L}(X,Y)$称为 X 的共轭空间，记成 X^*。不管 X 是否完备的，X^* 总是完备的。如果 $f\in X^*,x\in X$，$f(x)$是个实数，常将 $f(x)$记成 $\langle f,x\rangle$，因为 $f(x)$是线性的，所以记号 $\langle f,x\rangle$ 中关于 f 和 x 都是线性的，与内积相同。如果 $A\in\mathcal{L}(X,Y)$，A 可以诱导出一个映射 $A^*:Y^*\to X^*$，对任意的 $f\in Y^*$，定义 $A^*f\in X^*$ 为 $(A^*f)(x)=f(Ax)$，或者将这个事实写成 $\langle f,Ax\rangle=\langle A^*f,x\rangle$，与一般伴随映射相仿。为了与后面的概念区分，$A^*$ 称为单值伴随映射。

设 $A\in\mathcal{L}(X,Y)$，那么对于任意的 $x_1,x_2\in X$，$A(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1A(x_1)+\lambda_2A(x_2)$ 对一切 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ 成立，因此 graA 是一个凸锥。人们利用这个性质来将单值线性映射推广到集合值映射去。

定义 3.1.1 设 X 和 Y 是两个线性赋范空间 $A:X\to Y$ 是一个集合值映射，如果 graA 是凸锥，则称 A 是一个**凸过程**。如果进一步 graA 是闭凸锥，则称 A 是一个闭凸过程。

一个（闭）凸过程称为是严格的，如果 A 的有效定义域 $\mathrm{dom}\,A=X$。 □

最早考察凸过程的是经济学家 Rockafellar，他在研究经济过程时首先发现一类经济现象具有凸锥的性质，从而采用了凸过程这个名称。以后有人将对任意的 $x\in\mathrm{dom}\,A$，$A(x)$是线性子空间的集合值映射 A 称为线性集合值映射，并略称为线性映射，而将凸过程称为“子线性”集合值映射，但使用这个名词的人较少。

由于凸过程的像集是一个凸锥，因此，对任意的 $x_i\in\mathrm{dom}\,A$ 和任意的 $y_i\in A(x_i)$，$i=1,2$，成立 $\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2)\in\mathrm{gra}A(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，即 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in\mathrm{dom}\,A$ 和 $\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\in A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$。

以下的一些讨论将进一步揭示凸过程与“线性”之间的关系。

引理 3.1.1 $A:X\to Y$ 是凸过程的充分必要条件是下面两条同时满足：

(1) 如果 $x\in\mathrm{dom}\,A$，则 $\lambda x\in\mathrm{dom}\,A$，且 $\lambda A(x)=A(\lambda x)$，其中 $\lambda>0$；

(2) 如果 $x_1,x_2\in\mathrm{dom}\,A$，则 $x_1+x_2\in\mathrm{dom}\,A$，且 $A(x_1)+A(x_2)\subset A(x_1+x_2)$。 □

引理 3.1.1 可以直接从凸过程的定义获得，因而证明略去。这两个条件可以综合成：如果

$x_1, x_2 \in \mathrm{dom}\, A$，则对一切不同时为0的非负实数$\lambda, \mu$，成立

$$\lambda x_1 + \mu x_2 \in \mathrm{dom}\, A, \text{且} \lambda A(x_1) + \mu A(x_2) \subset A(\lambda x_1 + \mu x_2)。$$

引理 3.1.2　$A: X \to Y$是严格的闭凸过程。如果存在$x_1 \in X$，$A(x_1)$只有一个元素，那么A是一个单值的线性映射。

证明：回忆一个集合值映射称为严格的，如果它的有效定义域为X。所以对一切$x \in X$，$A(x)$都非空。

因为A是闭凸过程，所以$0 \in A(0)$。$A(x_1) \subset A(x_1) + A(0) \subset A(x_1 + 0) = A(x_1)$，因此$A(x_1) = A(x_1) + A(0)$，由于$A(x_1)$只有一个元素，因此$A(0)$也只有一个元素，而且$A(0) = \{0\}$。

对任意的$x \in X$，$A(x) + A(-x) \subset A(0) = \{0\}$，所以$A(x)$和$A(-x)$都只能有一个元素，而且$A(-x) = -A(x)$。于是齐次性对一切实数成立。此外，由于$A(x_2)$，$A(x_3)$，$A(x_2 + x_3)$都只有一个元素，$A(x_2) + A(x_3) \subset A(x_2 + x_3)$蕴含$A(x_2) + A(x_3) = A(x_2 + x_3)$。所以$A$是一个单值的线性映射。　□

引理3.1.2说明，一个严格的、单值的闭凸过程必然是线性映射，因此可以认为凸过程是线性映射的概念在集合值映射中的一种合理推广。

推论 3.1.1　$A: X \to Y$是凸过程，但未必是严格的，如果$A(0) = \{0\}$，那么成立：

(1) 如果$x, -x \in \mathrm{dom}\, A$，那么$A(-x) = -A(x)$，且$A(-x)$，$A(x)$都是单值的。

(2) 如果，线性子空间$X_1 \subset \mathrm{dom}\, A$，$x_1 \in X_1$，$x, x + x_1 \in \mathrm{dom}\, A$，那么$A(x + x_1) = A(x) + A(x_1)$。

证明：(1) 因为$0 \in \mathrm{dom}\, A$，因此$A(x_1) + A(-x_1) \subset A(0) = \{0\}$，即$A(x)$和$A(-x)$都是单值的，且$A(-x_1) = -A(x_1)$。

(2) A在X_1上是单值的，但是$A(x)$未必总是单值的。我们有

$$\begin{aligned} A(x) &= A(x) + A(x_1) - A(x_1) \subset A(x + x_1) - A(x_1) \\ &= A(x + x_1) + A(-x_1) \subset A(x)。 \end{aligned}$$

所以$A(x) = A(x + x_1) - A(x_1)$，或者写成$A(x) + A(x_1) = A(x + x_1)$。　□

下面的定义用来推广伴随映射的概念。

定义 3.1.2　设$A: X \to Y$一个凸过程。定义$A^*: Y^* \to X^*$如下，对任意的$y^* \in Y^*$，

$$A^*(y^*) = \{x^*; \langle x^*, x\rangle \leqslant \langle y^*, y\rangle, \text{对任意} (x, y) \in \mathrm{gra}A\}。$$

A^*称为A的**伴随过程**。　□

即使A是严格的，通常不能保证A^*也是严格的。下面的定理给出A^*的一个特性。

定理 3.1.1　如果A是凸过程，则A^*是闭凸过程。

证明：利用记号$\langle x^*, x\rangle$的性质，可以直接验证对于A^*引理3.1.1成立，因此A^*是凸过程。现证明它是闭的。设$(x_n^*, y_n^*) \in \mathrm{gra}A^*$，且$(x_n^*, y_n^*) \to (x_0^*, y_0^*)$，只要证明$(x_0^*, y_0^*) \in \mathrm{gra}A^*$。由于$(x_n^*, y_n^*) \in \mathrm{gra}A^*$，则$\langle x_n^*, x\rangle \leqslant \langle y_n^*, y\rangle$。由于对每个$x \in X$，$x_n^*(x) \to x_0^*(x)$①，所以$\langle x_n^*, x\rangle \to \langle x_0^*, x\rangle$，同理，$\langle y_n^*, y\rangle \to \langle y_0^*, y\rangle$。因此，$\langle x_0^*, x\rangle \leqslant \langle y_0^*, y\rangle$。　□

① 在X^*上，$x_n^* \to x_0^*$相当于函数的一致收敛，$x_n^*(x) \to x_0^*(x)$就是点点收敛。

注 根据定理 3.1.1，dom A^* 总是一个闭凸锥。

例 3.1.1 设 A 是一个 $X\to Y$ 的有界(单值)线性映射，我们根据定义 3.1.2 来求取它的伴随过程 $\mathscr{A}^*$ ②。

解：设 $x^*\in\mathscr{A}^*(y^*)$，根据定义 $\langle x^*,x\rangle\leqslant\langle y^*,Ax\rangle$；又因为如果 $(x,Ax)\in \mathrm{gra}A$，则由 A 是线性映射，$(-x,A(-x))\in\mathrm{gra}A$，因此 $\langle x^*,-x\rangle\leqslant\langle y^*,A(-x)\rangle=\langle y^*,-Ax\rangle$。综合这两种情况，得到 $\langle x^*,x\rangle=\langle y^*,Ax\rangle$，也就是 $\langle x^*,x\rangle=\langle A^*y^*,x\rangle$。这个式子对一切 $x\in X$ 成立，所以 $x^*=A^*y^*$。即得当 A 是单值线性映射的时候，它的伴随过程 $\mathscr{A}^*$ 也是单值的，而且就是 A^*，或者说对每一个 $y^*\in\mathbb{R}^n$，$\mathscr{A}(y^*)=\{A^{\mathrm{T}}y^*\}$。 □

例 3.1.1 说明凸过程的伴随过程是有界线性映射的共轭映射概念在集合值映射中的一个推广。

下面给出伴随过程的一些基本性质。

回忆共轭锥定义，如果 K 是一个锥，它的共轭锥定义为 $K^*=\{x^*;\langle x^*,x\rangle\geqslant 0,x\in K\}$。

引理 3.1.3 设 $A:X\to Y$ 是闭凸过程，那么下述关系式成立：

(1) $(x^*,y^*)\in\mathrm{gra}A^*$ 的充分必要条件是 $(-x^*,y^*)\in(\mathrm{gra}A)^*$ ③。

(2) $(-A)^*(y^*)=A^*(-y^*)$。

(3) $(A^{-1})^*(x)=-(A^*)^{-1}(-x)$。

(4) $A^{**}(x)=-A(-x)$。

(5) $A(0)=(\mathrm{dom}\,A^*)^*$。

(6) $A^{-1}(0)=(\mathrm{Im}(-A^*))^*$。

证明：(1) $(x^*,y^*)\in\mathrm{gra}A^*$，就是 $x^*\in A^*(y^*)$，所以对一切 $(x,y)\in\mathrm{gra}A$，有 $\langle x^*,x\rangle\leqslant\langle y^*,y\rangle$，或者写成 $\langle(-x^*,y^*),(x,y)\rangle\geqslant 0$，根据共轭锥的定义，就是 $(-x^*,y^*)\in(\mathrm{gra}A)^*$。上述过程可逆，因此结论(1)获证。

(2) 首先如果 $y\in A(x)$，那么 $-y\in(-A)(x)$。如果 $x^*\in(-A)^*(y^*)$，那么 $\langle x^*,x\rangle\leqslant\langle y^*,(-y)\rangle=\langle(-y^*),y\rangle$，就是 $x^*\in A^*(-y^*)$。此过程可逆，因此结论(2)获证。

结论(3)和结论(4)的证明和证明结论(2)类似，都是直接的验证过程，留给读者练习。

(5) 设 $y\in A(0)$，则对任意的 $(x^*,y^*)\in\mathrm{gra}A^*$，根据伴随过程的定义那么 $\langle y^*,y\rangle\geqslant\langle y^*,0\rangle=0$。由于 y^* 是 dom A^* 的任意元素，所以 $y\in(\mathrm{dom}\,A^*)^*$。

反之，如果 $y\in(\mathrm{dom}\,A^*)^*$，则对任意的 $y^*\in\mathrm{dom}\,A^*$，$\langle y^*,y\rangle\geqslant 0$。对任意的 $x^*\in A^*(y^*)$，$0\leqslant\langle y^*,y\rangle=\langle y^*,y\rangle+\langle -x^*,0\rangle$。根据本引理中的(1)，$(-x^*,y^*)\in(\mathrm{gra}A)^*$，所以 $(0,y)\in((\mathrm{gra}A)^*)^*=(\mathrm{gra}A)^{**}$。由于 $\mathrm{gra}A$ 是闭集，因此 $\mathrm{gra}A=(\mathrm{gra}A)^{**}$。

第(6)个等式的证明是前面结果的应用。

根据结论(5)有 $A^{-1}(0)=(\mathrm{dom}(A^{-1})^*)^*$，又根据结论(3)有 $(\mathrm{dom}(A^{-1})^*)^*=(-\mathrm{dom}(-(A^*)^{-1}))^*=(-\mathrm{dom}(A^*)^{-1})^*$，再根据逆映射意义，得 $(-\mathrm{dom}(A^*)^*=(-\mathrm{lm}A^*)^*$。

② 为了与单值伴随映射 $A^*:Y^*\to X^*$ 区分，这里用花体字母表示集合值的伴随映射。

③ 为了以后记号便利，在 $(x^*y^*)\in\mathrm{gra}A^*$ 中，y^* 是自变量。

结论可得。　□

由结论(4)可以看出：对于凸过程来讲，一般不成立 $A^{**}=A$。

3.1.2　凸过程的范数

为了更充分地说明凸过程是线性映射概念在集合值映射中的推广。本小节的目的是对凸过程定义它的范数，并在下一节进一步证明对于这个范数，Banach 空间的基本定理都能成立。这些结论进一步支持了凸过程可以看成是线性映射推广的说法。

定义 3.1.3　设 $A:X\to Y$ 是凸过程，则定义

$$\|A\| = \sup_{x\in \mathrm{dom}A\cap \mathbf{B}} \inf_{y\in A(x)} \|y\|。 \tag{3.1.1}$$

其中为了简单记 $\mathbf{B}=\mathrm{bd}B$ 为 X 中单位球球壳。$\|A\|$ 称为凸过程 A 的**范数**。如果 $\|A\|<\infty$，则称凸过程 A 范数有界。　□

根据定义可以直接得到

$$\begin{aligned}\sup_{x\in \mathrm{dom}A\cap \mathbf{B}} \inf_{y\in A(x)} \|y\| &= \sup_{x\in \mathrm{dom}A} \inf_{y\in A(x)} \frac{\|y\|}{\|x\|}\\ &= \sup_{x\in \mathrm{dom}A} \frac{d(0,A(x))}{\|x\|}\\ &= \sup_{x\in \mathrm{dom}A} \frac{m(A(x))}{\|x\|}\\ &= \sup_{x\in \mathrm{dom}A\cap \mathbf{B}} m(A(x))。\end{aligned}$$

由于 $A:X\to Y$ 是凸过程，则对任意的 $\alpha\in\mathbb{R}\ (\geqslant 0)$，

$$\begin{aligned}\|\alpha A\| &= \sup_{x\in \mathrm{dom}(\alpha A)} \inf_{y\in \alpha A(x)} \frac{\|y\|}{\|x\|}\\ &= \sup_{x\in \mathrm{dom}(A)} \inf_{\tilde{y}=\frac{y}{\alpha}\in A(x)} \alpha\frac{\|\tilde{y}\|}{\|x\|}\\ &= \alpha \sup_{x\in \mathrm{dom}(A)} \inf_{\tilde{y}\in A(x)} \frac{\|\tilde{y}\|}{\|x\|} = \alpha\|A\|。\end{aligned}$$

现在利用定义范数的第二个等价条件来证明三角不等式的成立。设 A_1 和 A_2 是两个凸过程，由于

$$d(0,A_1(x)+A_2(x))\leqslant d(0,A_1(x))+d(A_1(x),A_1(x)+A_2(x)), \tag{3.1.2}$$

而

$$\begin{aligned}d(A_1(x),A_1(x)+A_2(x)) &= \inf_{y_1,y_2\in A_1(x),y_3\in A_2(x)} d(y_1,y_2+y_3)\\ &\leqslant \inf_{y_1\in A_1(x),y_3\in A_2(x)} d(y_1,y_1+y_3)\\ &= \inf_{y_3\in A_2(x)} d(0,y_3)\\ &= d(0,A_2(x))。\end{aligned}$$

将此结果代入式(3.1.2),得到

$$\sup_x \frac{d(0,A_1(x)+A_2(x))}{\|x\|} \leqslant \sup_x \frac{1}{\|x\|}(d(0,A_1(x))+d(0,A_2(x)))$$
$$\leqslant \sup_x \frac{d(0,A_1(x))}{\|x\|} + \sup_x \frac{d(0,A_2(x))}{\|x\|}。$$

就是 $\|A_1+A_2\| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|$。

上面的讨论说明将定义式(3.1.1)称为范数是有道理的,它确实与单值线性映射的范数有很多相似之处。但也有不同处:首先 $\|A\|=0$,意味着 $0\in A(x)$对一切 $x\in \mathrm{dom}\ A$ 成立,而不是说 A 是零映射;其次,只成立正齐次性,即只对 $\alpha\in\mathbb{R}$ $(\geqslant 0)$成立 $\|\alpha A\| = \alpha\|A\|$。

3.1.3 凸过程的基本定理

对凸过程定义范数是为了将 Banach 空间的基本结论推广到凸过程。下面不加证明地引入 **Robinson-Ursescu 定理**,它的证明比较复杂,读者可以参考文献[9]或者[10]。

定理 3.1.2 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间,$F:X\to Y$ 为闭凸值的集合值映射,$y_0\in \mathrm{Int\ Im}(F)$,即 y_0 为 $\mathrm{Im}(F)$的内点,$x_0\in F^{-1}(y_0)$④,那么存在常数 $l>0$,使得对任意 $y\in B(y_0, l)$和任意的 $x\in \mathrm{dom}\ A$,成立

$$d(x,F^{-1}(y)) \leqslant \frac{1}{l}d(y,F(x))(1+\|x-x_0\|)。$$ □

注 1 将 x 取成 x_0,那么在定理 3.1.2 条件下成立:

$$d(x_0,F^{-1}(y)) \leqslant \frac{1}{l}d(y,F(x_0)),$$

或者说成存在 $x\in F^{-1}(y)$,成立

$$\|x-x_0\| \leqslant \frac{1}{l}\|y-y_0\|。 \quad (3.1.3)$$ □

注 2 如果 $F:X\to Y$ 为闭凸值的集合值映射,那么式(3.1.3)蕴含 F^{-1}在 $\mathrm{Im}F$ 的内点上是下半连续的。 □

根据定理 3.1.2,从式(3.1.1)出发可以证明 Banach 空间的基本定理对于凸过程也成立。为了记号方便,记 $L=\frac{1}{l}$。

定理 3.1.3 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间,$A:X\to Y$ 为闭凸过程,如果 $\mathrm{Im}(A)=Y$,那么 A^{-1}是 Lipschitz 映射。

证明:我们证明对任意的 $y_1\in Y$ 和任意的 $x_1\in A^{-1}(y_1)$,以及对任意 $y_2\in Y$,存在 $x_2\in A^{-1}(y_2)$,使得 $\|x_1-x_2\| \leqslant L\|y_1-y_2\|$。

因为 $A:X\to Y$ 为闭凸过程,所以 $0\in A(0)$,或者 $0\in A^{-1}(0)$。固定 $y_0=0, x_0=0$,应用定

④ 回忆我们对集合值映射定义过两种逆,$x_0\in F^{-1}(y_0)$意味着 $y_0\in F(x_0)$。

理 3.1.2，在 Y 空间原点的充分小的邻域 $B(0,\varepsilon)$ 内，当 $y\in B(0,\varepsilon)$ 时，存在 $x\in A^{-1}(y)$，使得 $\|x\|\leqslant L\|y\|$。由于 A 是凸过程，所以对任意的 $y\in Y$，都可以找到 $x\in A^{-1}(y)$，使得 $\|x\|\leqslant L\|y\|$ 成立。

对任意的一对 $y_1,y_2\in Y$，则存在 $e\in A^{-1}(y_2-y_1)$，使得 $\|e\|\leqslant L\|y_1-y_2\|$。任意取定 $x_1\in A^{-1}(y_1)$，再令 $x_2=x_1+e$，那么 $y_2=y_1+(y_2-y_1)\in A(x_1)+A(e)\subset A(x_1+e)$。于是 $x_2\in A^{-1}(y_2)$，并且成立

$$\|x_1-x_2\| = \|e\| \leqslant L\|y_1-y_2\|。 \tag{3.1.4}$$□

关于定理 3.1.3 有下面两个注释。

注 1　式(3.1.4)蕴含 A^{-1} 是下半连续的。□

注 2　定理 3.1.3 通常称为集合值映射的开映射定理，因为对于任意开集 $O\subset X$，$x_0\in O$，则存在 $\varepsilon>0$，使得 $B(x_0,\varepsilon)\subset O$。任意取定 $y_0\in A(x_0)$，考虑 $y\in B(y_0,\varepsilon l)$。根据定理 3.1.3，存在 $x\in A^{-1}(y)$，使得 $\|x-x_0\|\leqslant L\|y-y_0\|<\varepsilon$，即 $B(y_0,\varepsilon l)\subset A(B(x_0,\varepsilon))\subset A(O)$，即 $A(O)$ 是开集。□

推论 3.1.2　设 X 和 Y 是两个 Banach 空间，$A:X\to Y$ 为严格的闭凸过程，那么存在 L，使得对任意的 $x_1,x_2\in X$ 成立

$$A(x_1)\subset A(x_2)+L\|x_1-x_2\|\bar{B}, \tag{3.1.5}$$

其中的 $\bar{B}$ 是 Y 空间的闭单位球。进一步 $\|A\|$ 是有限的。

证明：由于 $A:X\to Y$ 为严格的闭凸过程，根据本节的练习 2，A^{-1} 是满的闭凸过程。对 A^{-1} 应用定理 3.1.3，对任意的 $x_1,x_2\in X$ 和任意的 $y_1\in A(x_1)$，存在 $y_2\in A(x_2)$，使得 $\|y_1-y_2\|\leqslant L\|x_1-x_2\|$，就是 $y_1\in y_2+L\|x_1-x_2\|\bar{B}$，式(3.1.5)获证。

取 $x_2=0$，则式(3.1.5)成为 $A(x_1)\subset A(0)+L\|x_1\|\bar{B}$。取 $\|x_1\|=1$，于是当 $y_1\in A(x_1)$ 时，成立 $y_1\in A(0)+L\bar{B}$。因为 $A(0)$ 是有界的，所以 $\sup\limits_{x_1}\|y_1\|$ 有界，即 $\|A\|$ 是有限的。□

推论 3.1.2 也称为凸过程的闭图像定理。

本节最后证明一致有界定理，在线性泛函分析中也称为共鸣定理。

定理 3.1.4　设 X 和 Y 是两个 Banach 空间，$A_\alpha:X\to Y$ 为一族闭凸过程，如果对任意的 $x\in X$，存在 $y_\alpha\in A_\alpha(x)$，使得 $\sup\limits_\alpha\|y_\alpha\|<\infty$，那么 $\sup\limits_\alpha\|A_\alpha\|<\infty$。

证明：定义单值映射如下：

$$\rho_\alpha(x)=\inf_{y\in A_\alpha(x)}\|y\| = d(0,A_\alpha(x))=m(A_\alpha(x))。$$

容易证明 ρ_α 具有下列性质：①它是正齐次的；②它是下半连续的(对于有限维空间，定理 2.2.1 说明它是连续的)。再定义

$$\rho(x)=\sup_\alpha\rho_\alpha(x)。$$

根据定理条件 $\rho(x)<\infty$ 对一切 x 成立，而且 $\rho(x)$ 是正的、正齐次的和下半连续的(参阅本书 1.4 节)。于是 $\rho(x)$ 在原点是连续的。从而对给定的 $\varepsilon=1$，存在 $\delta>0$，当 $x\in B(0,\delta)$ 时，$\rho(x)\leqslant 1$，那么对任意的 $x\in X$，有 $\rho(x)\leqslant\delta^{-1}\|x\|$。因此

$$\delta^{-1}\|x\| \geqslant \rho(x) = \sup_{\alpha}\rho_{\alpha}(x) = \sup_{\alpha} m(A_{\alpha}(x)),$$

就是 $\|A_{\alpha}\| \leqslant \delta^{-1}$ 对一切 α 成立。 □

为了以后研究控制系统的需要，这里应用定理 3.1.4 证明下面的结论。

定理 3.1.5 设 U 是一个度量空间，X 和 Y 是两个 Banach 空间。对每个 $u\in U$，$A(u)$：$X\to Y$ 为一个闭凸过程。如果对每个 $x\in X$，存在 $y_u\in A(u)(x)$，使得 $\sup_u \|y_u\| < \infty$。那么下面两条等价：

(1) $u\mapsto \mathrm{gra}A(u)$ 是下半连续的。

(2) $(u,x)\mapsto A(u)(x)$ 是下半连续的。

证明：只要固定 $x\in X$，由结论(2)到结论(1)是直接的，因此我们只要证明从结论(1)到结论(2)的情形。

根据第 2 章第 1 节的练习 2 的(2)给出的充分必要条件，我们只要证明对于任意一个收敛到 (u,x) 的序列 (u_n,x_n)，对于任意的 $y\in A(u)(x)$，存在 $y_n\in A(u_n)(x_n)$，使得 $y_n\to y(n\to\infty)$。

因为 $u\mapsto \mathrm{gra}A(u)$ 是下半连续的，即对任意的 $(x,y)\in \mathrm{gra}A(u)$，对任意的 $u_n\to u$，存在 $(\hat{x}_n,\hat{y}_n)\in \mathrm{gra}A(u_n)$，使得 $(\hat{x}_n,\hat{y}_n)\to(x,y)$。由定理 3.1.5 的条件“每个 $x\in X$，存在 $y_u\in A(u)(x)$，使得 $\sup_u\|y_u\|<\infty$”蕴含 $\|A(u)\|$ 有界，即存在 L，使得 $\|A(u)\|\leqslant L$ 对一切 $u\in U$ 成立。因此对 $\hat{x}_n-x_n$，存在 $\tilde{y}_n\in A(u_n)(\hat{x}_n-x_n)$，满足 $\|\tilde{y}_n\|\leqslant L\|\hat{x}_n-x_n\|$。由于 $\hat{x}_n-x_n\to x-x=0$，所以 $\tilde{y}_n\to 0$。进一步由于 $A(u_n)$ 是凸过程，因此记 $y_n=\tilde{y}_n+\hat{y}_n$。则有

$$y_n = \tilde{y}_n+\hat{y}_n \in A(u_n)(x_n-\hat{x}_n)+A(u_n)(\hat{x}_n) \subset A(u_n)(x_n)。$$

而 $\hat{y}_n\to y$，所以 $y_n\to y$。证毕。 □

练习

1. 证明 $A(x)$ 是凸过程的充分必要条件是下面两条性质同时满足：

 (1) 如果 $x,\lambda x\in \mathrm{dom}\,A$，则 $\lambda A(x)\in A(\lambda x)$，其中要求 $\lambda>0$；

 (2) 如果 $x_1,x_2,x_1+x_2\in \mathrm{dom}\,A$，则 $A(x_1)+A(x_2)\subset A(x_1+x_2)$。

2. 证明如果 $A(x)$ 是凸过程，则 $A^{-1}(x)$ 也是凸过程。

3. 证明引理 3.1.2 中的结论(3)和结论(4)。

4. 设 X,Y 是两个 Banach 空间，$L\subset X$，$M\subset Y$ 是两个闭凸集，$f\in L(X,Y)$，定义

$$F(x) = \begin{cases} f(x)-M, & x\in L, \\ \varnothing, & x\notin L。 \end{cases}$$

 那么，(1) $F^{-1}(y)=\{x;x\in y+M\}$。

 (2) 如果存在 $y_0\in \mathrm{Int}(f(L)-M)$，那么对任意的 $x_0\in F^{-1}(y_0)$，存在 $l>0$，对所有的 $y\in B(y_0,l)$，$d(x,F^{-1}(y))\leqslant Ld(f(x)-y,M)(1+\|x-x_0\|)$，其中 $L=l^{-1}$。

5. 设 X,Y 是两个 Banach 空间，$A:X\to Y$ 是一个闭凸过程，$K\subset X$ 是一个闭凸锥，并且 $K-\mathrm{dom}\,A=X$，用 $A|_K$ 表示 A 在 K 上的限制，那么

$$(A\mid_K)^*(y)=\begin{cases}A^*(y^*), & y^*\in \mathrm{dom}(A^*),\\ \varnothing, & \text{其他。}\end{cases}$$

6. 设 X,Y 是两个 Banach 空间，$A:X\to Y$ 是一个闭凸过程，$K\subset X$ 是一个闭凸锥，并且 $K-\mathrm{dom}\,A=X$，那么

$$(A(K))^*=(A^*)^{-1}(K^*)。$$

（这个结论称为双极定理，是伴随过程的基本结论之一。）

3.2 有限维空间的凸过程

本节讨论有限维空间上的凸过程，将建立一些进一步的结论，尤其要建立它与线性映射(矩阵)在结构上的相似性，从而加深对有限维空间凸过程的理解。

3.2.1 伴随过程

回忆伴随过程的定义。如 $A:X\to Y$ 一个凸过程。A 的伴随过程定义为 $A^*:Y\to X$：

$$A^*(y^*)=\{x^*;\langle x^*,x\rangle\leqslant\langle y^*,y\rangle,(x,y)\in \mathrm{gra}A\}。$$

根据引理 3.1.2 的结论，$(y^*,x^*)\in \mathrm{gra}A^*$ 的充分必要条件是 $(-x^*,y^*)\in(\mathrm{gra}A)^*$。

关于伴随过程有下面的运算结果，我们略去其证明，有兴趣的读者可以参阅文献[2]。

定理 3.2.1 设 $A_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p;A_2:\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^k$ 为两个凸过程。

(1) 如果 $p=q$，则可以定义复合过程 $A_2A_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$。$A_2A_1$ 具有下列性质：A_2A_1 是凸过程；并且当 $\mathrm{ri\ int\ Im}A_1\cap\mathrm{dom}\,A_2\neq\emptyset$，或者 $\mathrm{Im}A_1\cap\mathrm{ri\ int\ dom}A_2\neq\emptyset$ 时，有 $(A_2A_1)^*=A_1^*A_2^*$。

(2) 如果 $p=k,q=n$，并且 $\mathrm{int\ dom}A_1\cap\mathrm{int\ dom}A_2\neq\emptyset$，那么 A_1+A_2 是凸过程，并且 $(A_1+A_2)^*=A_1^*+A_2^*$。 □

回忆函数空间中伴随映射的性质。如果 A_1 和 A_2 是两个适当的线性映射，使得 A_1+A_2 或者 A_1A_2 是可以定义的，那么成立 $(A_1A_2)^*=A_2^*A_1^*$ 和 $(A_1+A_2)^*=A_1^*+A_2^*$。定理 3.2.1 说明，伴随过程具有与单值伴随映射相似的性质，但是定理 3.2.1 的证明并不像共轭映射那样简单。下面的定理也可以看成是定义单值伴随映射的等式 $\langle y,Ax\rangle=\langle A^*y,x\rangle$ 在凸过程中的一种推广。

定理 3.2.2 设 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是一个凸过程，假设 $x_0\in\mathrm{int\ dom}A$ 和 $y_0^*\in\mathrm{dom}\,A^*$，那么

$$\sup_{x^*\in A^*(y_0^*)}\langle x^*,x_0\rangle=\inf_{y\in A(x_0)}\langle y_0^*,y\rangle。$$

证明：定义一个单值映射 $\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\Phi(x)=\inf_{y\in\mathbb{R}^m}\{\langle y_0^*,y\rangle+\delta((x,y),\mathrm{gra}A)\},$$

其中的 $\delta((x,y),\mathrm{gra}A)$ 是 $\mathrm{gra}A$ 的指示函数。根据第 1 章第 3 节的练习 6，$\Phi(x)$ 是凸函数。下面证明对任意的 $x\in\mathrm{dom}\,A$，$\Phi(x)>-\infty$。因为否则存在 $y_k\in A(x)$，而 $\langle y_0^*,y_k\rangle\to-\infty$，然而根据伴随过程的定义有 $\langle y_0^*,y_k\rangle\geqslant\langle x^*,x\rangle$，其右端是不依赖 k 的常数，与 $\langle y_0^*,y_k\rangle\to-\infty$ 矛盾。

当 $x_0\in\mathrm{int\ dom}A$ 时，根据定理 1.2.5，存在至多 $n+1$ 个向量 $x_i\in\mathrm{dom}\,A$，使得 $x_0=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_ix_i$。由于 A 是凸过程，因此 $\mathrm{co}(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})\subset\mathrm{dom}\,A$。又由于 $\Phi(x)$ 是凸函数，因此 $\Phi(x_0)\leqslant$

$\max\{\Phi(x_i);i=1,2,\cdots,n+1\}$，即 $\Phi(x_0)$是有界的，进而 $\Phi(x)$在 x_0 的一个邻域中有界，根据引理 1.3.1，$\Phi(x)$在 x_0 的一个邻域中是 Lipschitz 的，从而是连续的。于是由定理 1.4.6，$\Phi^{**}(x)=\Phi(x)$在 x_0 的一个邻域中成立。应用第 1 章第 4 节中关于共轭函数的定义，有

$$\Phi(x_0)=\sup_{x^*}\{\langle x^*,x_0\rangle-\Phi^*(x^*)\}。\tag{3.2.1}$$

再根据 $\Phi^*(x^*)$的定义：

$$\begin{aligned}\Phi^*(x^*)&=\sup_x\{\langle x,x^*\rangle-\Phi(x)\}\\&=\sup_x\{\langle x,x^*\rangle-\inf_{y\in\mathbb{R}^m}(\langle y_0^*,y\rangle+\delta((x,y),\mathrm{gra}A))\}\\&=\sup_{x,y}\{\langle x,x^*\rangle-\langle y_0^*,y\rangle-\delta((x,y),\mathrm{gra}A)\}\\&=\sup_{x,y}\{\langle(x,y),(x^*,-y_0^*)\rangle-\delta((x,y),\mathrm{gra}A)\}。\end{aligned}$$

根据共轭函数的定义，$\Phi^*(x^*)$应该是 $\delta((x,y),\mathrm{gra}A)$的共轭函数 $S((x^*,-y_0^*),\mathrm{gra}A)$。由上章等式(2.1.3)$S((x^*,-y_0^*),\mathrm{gra}A)=\delta((x^*,-y_0^*),-(\mathrm{gra}A)^*)$，而 $\delta((x^*,-y_0^*),-(\mathrm{gra}A)^*)=\delta((-x^*,y_0^*),(\mathrm{gra}A)^*)$。最后得到 $\Phi^*(x^*)=\delta((-x^*,y_0^*),(\mathrm{gra}A)^*)$。将它代入式(3.2.1)，得到

$$\begin{aligned}&\sup_{x^*}\{\langle x^*,x_0\rangle-\delta((y_0^*,-x^*),(\mathrm{gra}A)^*)\}\\&=\Phi(x_0)\\&=\inf_y\{\langle y_0^*,y\rangle+\delta((y,x_0),\mathrm{gra}A)\}。\end{aligned}$$

显然当 $x_0^*\in A^*(y_0^*)$左式有最大，而当 $y\in A(x_0)$右式有最小。结论得证。　□

定理 3.2.2 给出了凸过程和它的伴随过程的联系，由于考虑的是集合值映射，因而单值映射成立的等式$\langle y,Ax\rangle=\langle A^*y,x\rangle$变成了边界上的关系。这给予我们将单值映射的性质推广到集合值映射提供了一个方向。

定理 3.2.3　设 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是一个严格闭凸过程，那么成立

(1) A 是 Lipschitz 映射，并且它的 Lipschitz 常数可以是 $\|A\|$。

(2) 对任意的 $y^*\in\mathrm{dom}\,A^*$和 $x^*\in A^*(y^*)$，成立 $\|x^*\|\leqslant\|A\|\|y^*\|$。

(3) 在 $\mathrm{dom}\,A^*\cap(-\mathrm{dom}\,A^*)$上 A^*是一个线性映射。

证明：(1) 根据推论 3.1.2，A 是 Lipschitz 映射，只要证明其 Lipschitz 常数为 $\|A\|$。

对任意的 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$，$x_1\neq x_2$，记 $a=\|x_1-x_2\|$和 $x_3=a^{-1}(x_1-x_2)$，那么 $\|x_3\|=1$，根据凸过程范数的定义，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $y_3=y_3(\varepsilon)\in A(x_3)$，使得 $\|y_3\|<\|A\|+\varepsilon$。任取 $y_2\in A(x_2)$，令 $y_1=y_2+ay_3$，因为 $x_1=x_2+ax_3$，所以 $A(x_2)+A(ax_3)\subset A(x_1)$，进一步，$y_1=y_2+ay_3\in A(x_1)$。就是 $\|y_1-y_2\|=a\|y_3\|<(\|A\|+\varepsilon)a=(\|A\|+\varepsilon)\|x_1-x_2\|$。又因为$\{y_3(\varepsilon)\}$有界，且 $A(x_3)$是闭的，所以存在 $y_3^0\in A(x_3)$，使得 $y_3(\varepsilon)\to y_3^0(\varepsilon\to0)$①。进一步，$y_1\to y_1^0\in A(x_1)$。因此

① 或者它的子列收敛。以后我们经常这样引用，不再一一说明。

$$\| y_1^0 - y_2 \| \leqslant \| A \| \| x_1 - x_2 \|, \tag{3.2.2}$$

即可得 $A(x_2) \subset A(x_1) + \| A \| \| x_1 - x_2 \| \overline{B}$，其中 $\overline{B}$ 是闭的单位球。

(2) 设 $y^* \in \mathrm{dom}\, A^*$，考虑 $x^* \in A^*(y^*)$。如 $x^* = 0$ 则结论成立，因此不妨认为 $x^* \neq 0$。根据伴随过程的定义，对一切 $(x, y) \in \mathrm{gra} A$ 成立 $\langle y^*, y \rangle \geqslant \langle x^*, x \rangle$。取 $x = \| x^* \|^{-1} x^*$，则 $\langle x^*, x \rangle = \| x^* \| \leqslant \langle y^*, y \rangle$。因为 $\| x \| = 1$，所以对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $y \in A(x)$，使得 $\| y \| < \| A \| + \varepsilon$。进一步，根据 Schwarz 不等式，得到

$$\| x^* \| \leqslant \langle y^*, y \rangle \leqslant \| y^* \| \| y \| \leqslant (\| A \| + \varepsilon) \| y^* \|。$$

由于 ε 是任意的，结论获证。

(3) 根据 $\| x^* \| \leqslant \| A \| \| y^* \|$，所以当 $y^* = 0$ 时，$x^* = 0$，就是 $A^*(0) = \{0\}$。$\mathrm{dom}\, A^* \cap (-\mathrm{dom}\, A^*)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个子空间。根据推论 3.1.1 及其后面的说明，A^* 限制在 $\mathrm{dom}\, A^* \cap (-\mathrm{dom}\, A^*)$ 上是单值映射。 □

$\mathrm{dom}\, A^* \cap (-\mathrm{dom}\, A^*)$ 就是在 $\mathrm{dom}\, A^*$ 中的最大线性子空间。结论(3)是说 A^* 在其定义域中的任意一个子空间上都是线性单值映射。

关于定理 3.2.3 有下列注释。

注 1 在式(3.2.2)中，由于 $y_2 \in A(x_2)$ 是任意的，因此当选取 $x_2 = 0$ 时，可以取 $y_2 = 0$，这样式(3.3.2)就成为 $\| y_1^0 \| \leqslant \| A \| \| x_1 \|$。就是说对任意的 x，必定存在一个 $y \in A(x)$，使得 $\| y \| \leqslant \| A \| \| x \|$。 □

注 2 对于 A^* 应用注 1，得到“任意的 $y^* \in \mathrm{dom}\, A^*$，必定存在 $x^* \in A^*(y^*)$，使得 $\| x^* \| \leqslant \| A^* \| \| y^* \|$”。而定理的结论(2)是更强的结论，它断言对一切 $x^* \in A^*(y^*)$，成立 $\| x^* \| \leqslant \| A \| \| y^* \|$。这也说明对于凸过程总成立 $\| A^* \| \leqslant \| A \|$，这与单值映射也不同。 □

3.2.2 凸过程的结构

这一小节讨论 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的凸过程，要证明有限维空间上的凸过程有着与线性变换相似的结构。

一个凸锥称为恰当的，如果它不含一个线性子空间。

定义 3.2.1 设 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是凸过程，x 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个非零向量，如果存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得 $\lambda x \in A(x)$，则称 x 是 A 的关于 λ 的一个**特征向量**，对应地，λ 称为 A 的一个**特征值**。 □

注意由于我们只在 $\mathbb{R}^n$ 中讨论凸过程，因此要求特征值是实数。因而即使 A 是线性映射(矩阵)，依然可以没有特征值。但是对于定义在闭凸锥上的有界的闭凸过程，我们有下面的结论。

引理 3.2.1 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是非零恰当的闭凸锥，$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个有界的闭凸过程，并且满足：

(1) $K \subset \mathrm{dom}\, A$；

(2) $A(x) \cap K \neq \emptyset$ 对所有的 $x \in K$ 成立。

则存在 $x \in K$，$x \neq 0$ 和 $\lambda \geqslant 0$，使得 $\lambda x \in A(x)$。

证明：(1) 先设 $A(x)\cap \mathrm{re\,int}K\neq\varnothing$，对所有 $x\in K, x\neq 0$ 成立。考虑集合

$$\Omega=\{\omega\in\mathbb{R}(>0)；\text{存在 } x\in K\cap \mathbf{B}:(A(x)-\omega x)\cap K\neq\varnothing\},\tag{3.2.3}$$

回忆 $\mathbf{B}=\mathrm{bd}B=\mathrm{bd}\bar{B}$ 为单位球的球壳。因为 $A(x)\cap \mathrm{re\,int}K\neq\varnothing$，所以 $\Omega\neq\varnothing$。我们证明 Ω 是有界的。

如果存在 ω_i 满足式(3.2.3)，且 $\omega_i\to\infty(i\to\infty)$。对应于 ω_i 的 x 记成 x_i，则 $x_i\in K$。由于 $\|x_i\|=1$，因此$\{x_i\}$存在收敛子序列，不妨认为 $x_i\to x_0$，则 $x_0\in K$。由于 ω_i 满足式(3.2.3)，因此

$$\omega_i^{-1}A(x_i)-x_i\in K。$$

令 $\omega_i\to\infty$，由于 A 是有界的，因此 $-x_0\in K$。这与 K 是恰当的矛盾。所以 $\sup\Omega<\infty$。

令 $\omega_0=\sup\Omega$。根据 K 和 A 都是闭的，因此存在 $x_0\in K\cap\mathbf{B}$；$(A(x_0)-\omega_0x_0)\cap K\neq\varnothing$。任取 $z_0\in(A(x_0)-\omega_0x_0)\cap K$，考虑

$$A\left(x_0+\frac{z_0}{2\omega_0}\right)-\omega_0\left(x_0+\frac{z_0}{2\omega_0}\right)\supset A(x_0)+A\left(\frac{z_0}{2\omega_0}\right)-\omega_0x_0-\frac{z_0}{2}$$

$$\supset A\left(\frac{z_0}{2\omega_0}\right)+\frac{z_0}{2},$$

其中应用了 $z_0\in(A(x_0)-\omega_0x_0)$。如 $z_0\neq 0$，则根据假设 $A(z_0)\cap \mathrm{re\,int}K\neq\varnothing$，进一步 $\left(A\left(\frac{z_0}{2\omega_0}\right)+\frac{z_0}{2}\right)\cap\mathrm{re\,int}K\neq\varnothing$②。记 $y_0=\left\|x_0+\frac{z_0}{2\omega_0}\right\|^{-1}\left(x_0+\frac{z_0}{2\omega_0}\right)$，则 $y_0\in K\cap\mathbf{B}$，且$(A(y_0)-\omega_0y_0)\cap\mathrm{re\,int}K\neq\varnothing$，因此稍微改变 ω_0 依然可使$(A(y_0)-\omega_0y_0)\cap\mathrm{re\,int}K\neq\varnothing$，这与 $\omega_0=\sup\Omega$ 矛盾。这个矛盾说明 $z_0=0$，就是 $\omega_0x_0\in A(x_0)$，即 x_0 是特征向量，其特征值 $\omega_0>0$。

(2) 这一步要将假设 $A(x)\cap\mathrm{re\,int}K\neq\varnothing$ 换成引理的条件 $A(x)\cap K\neq\varnothing$。

因为 K 是闭凸锥，所以总存在相对内点。取定 $x_c\in\mathrm{re\,int}K$，定义一个线性单值映射 A_k：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，

$$A_k(x)=k^{-1}\langle x_c,x\rangle x_c,$$

那么对任意的 $k>0$ 和 $x\in\mathbb{R}^n$，$A_k(x)\cap\mathrm{re\,int}K\neq\varnothing$。

考虑集合值映射$(A+A_k)(x)=A(x)+k^{-1}\langle x_c,x\rangle x_c$，那么对任意的 $x\in K, x\neq 0$，成立 $(A+A_k)(x)\cap\mathrm{re\,int}K\neq\varnothing$。对$(A+A_k)$应用第一部分的证明，存在 $\omega_k>0$ 和向量 $x_k\in K\cap\mathbf{B}$，$x_k\neq 0$，使得 $\omega_kx_k\in(A+A_k)(x_k)=A(x_k)+k^{-1}\langle x_c,x_k\rangle x_c$。不妨认为当 $k\to\infty$时，$\omega_k\to\omega_0$，$x_k\to x_0$，则 $\omega_0\geqslant 0$，$\omega_0x_0\in A(x_0)$。 □

设 K 是一个凸锥，$A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是一个凸过程，称 K 是 A 的**不变锥**，如果对任意的 $x\in K$，$A(x)\subset K$。如果 K 是一个子空间，K 关于 A 是不变的，则称 K 是 A 的一个**不变子空间**。

设 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是一个严格的闭凸过程，根据定理 3.2.3 的结论(3)，A^*限制在 $\mathrm{dom}\,A^*\cap(-\mathrm{dom}\,A^*)$上是一个单值的线性映射，用 S 表示 $\mathrm{dom}\,A^*\cap(-\mathrm{dom}\,A^*)$中最大的 A^*不变子空间，再记 $T=S^{\perp}$。下面将要证明子空间 T 是最小的 A 不变子空间③。

② 这里应用这样的事实，如果 K 是凸锥，$x\in\mathrm{int}\,K$，$y\in K$，那么 $ax+by\in\mathrm{int}\,K$，$a,b>0$。

③ 这里的最小是指如果存在 A 的不变子空间 $T_1\subset T$，则 $T_1=T$。

限制在 S 上 A^* 是线性映射，而 S 又是 A^* 不变子空间，而因此的 $A^*|_S$ 可以描述为一个矩阵，特别在适当地选择基后，$A^*|_S$ 可以具有 Jordan 型。用 S_1 表示 S 中的最小 A^* 不变子空间。根据线性代数的知识，S_1 未必是唯一的。如果将 S 取成实空间，那么 S_1 是 1 维的时候，它是特征子空间，其中每一个非零向量都是关于同一个特征值的特征向量；当 S_1 是 2 维的时候，可以适当选取一组基，在这组基上，

$$A^*|_{S_1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}。$$

在复向量空间里它是两个特征值分别为 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 和 $\alpha-\mathrm{i}\beta$ 的特征子空间的直和，其中 i 是虚数单位。

引理 3.2.2 T 是一个最小的 A 不变子空间。

证明：任取 $x\in T$ 和 $y\in A(x)$；再任取 $y^*\in S$，那么 $A^*(y^*)$ 只有一个元素，且 $A^*(y^*)\in S$。根据伴随过程的定义和 $T=S^\perp$，成立

$$\langle y,y^*\rangle \geqslant \langle A^*(y^*),x\rangle = 0。$$

注意到 $-y^*\in S$，它也成立上述不等式，因此只有 $\langle y,y^*\rangle=0$，由于 $y^*\in S$ 是任意的，因此 $y\in S^\perp=T$。T 是 A 不变的。

下面证明 T 是最小的。如果存在子空间 $T_1\subset T$，T_1 也是 A 不变的。因为 $0\in T_1$，所以 $A(0)\subset T_1$，根据引理 3.1.3 的结论(5)，就是 $(\mathrm{dom}\ A^*)^*\subset T_1$。任意取定 $v^*\in T_1^\perp$，则对任意的 $x\in(\mathrm{dom}\ A^*)^*$，$\langle x,v^*\rangle=0$，即 $v^*\in((\mathrm{dom}\ A^*)^*)^*=\mathrm{dom}\ A^*$，所以 $\mathrm{dom}\ A^*\supset T_1^\perp$。进一步可得 $\mathrm{dom}\ A^*\cap(-\mathrm{dom}\ A^*)\supset T_1^\perp$。记 $S_1=T_1^\perp$，则 $\mathrm{dom}\ A^*\cap(-\mathrm{dom}\ A^*)\supset S_1\supset S$。

现在证明 S_1 是 A 不变的。任取 $x\in T_1$，和任取 $y\in A(x)\in T_1$。再取 $y^*\in S_1$，由伴随过程的定义，

$$\langle A^*(y^*),x\rangle \leqslant \langle y^*,y\rangle = 0。 \tag{3.2.4}$$

因 T_1 是子空间，所以 $-x\in T_1$，用 $-x$ 代替 x，可得 $\langle A^*(y^*),-x\rangle\leqslant 0$。因此 $\langle A^*(y^*),x\rangle=0$，即 $A^*(y^*)\in T_1^\perp=S_1$。$S_1$ 是 A^* 不变子空间。根据假设 S 是 $\mathrm{dom}\ A^*\cap(-\mathrm{dom}\ A^*)$ 中最大的 A^* 不变子空间，所以 $S=S_1$，或者 $T_1=T$。 □

设 $\lambda\in\mathbb{R}$，构造集合值映射 $A-\lambda I$，其中 A 是凸过程，I 是恒等的单值映射(或者看成单位矩阵)。那么可以直接验证 $A-\lambda I$ 也是凸过程。进一步 $(A-\lambda I)^{-1}$ 也是凸过程。根据定理 3.1.3，当 A 是闭凸过程，且 $\|A\|<\infty$ 时，$(A-\lambda I)^{-1}$ 也是范数有界的闭凸过程，进一步对任意的正整数 k，$(A-\lambda I)^{-k}$ 也是范数有界的闭凸过程。定义闭凸锥 $L_k(\lambda)$ 如下：

$$L_k(\lambda) = (A-\lambda I)^{-k}(0),\quad k=1,2,\cdots。$$

容易验证当 $m\geqslant k$ 时，$L_m(\lambda)\supset L_k(\lambda)$，并记

$$L(\lambda) = \bigcup_{k\geqslant 1} L_k(\lambda)。$$

用 $\sigma(A^*)$ 表示 A^* 的特征值组成的集合，根据定理 3.2.3 的结论(2)，当 $\|A\|<\infty$ 时，$\sigma(A^*)$ 是有界集，$\|A\|$ 是它的一个上界。用 $\lambda_M(A^*)$ 表示 A^* 的最大特征值。为了应用方便，如

果$\sigma(A^*)$是空集，则规定$\lambda_M(A^*)=-\infty$。

为了方便，进一步记$B_\lambda=A-\lambda I$，特别当λ确定之后，就用B表示B_λ。根据定理 3.2.1，成立$B^*=A^*-\lambda I$，并且容易验证：dom B=dom A，dom B^*=dom A^*；一个凸锥或者子空间是A不变的充分必要条件它是B不变的；同样它是A^*不变的充分必要条件它是B^*不变的。

根据特征值的定义，当$\lambda>\lambda_M(A^*)$时，对于任意的正整数k，有$(B^*)^{-k}(0)=\{0\}$。

定理 3.2.4　设S是 dom $A^*\cap(-\text{dom } A^*)$中最大的$A^*$不变子空间，如果$S=\{0\}$，并且$\lambda>\lambda_M(A^*)$，那么$L(\lambda)=\mathbb{R}^n$。

证明：要证明$L(\lambda)=\mathbb{R}^n$只要证明$(L(\lambda))^*=\{0\}$。

我们有

$$(L_k(\lambda))^* = (B^{-k}(0))^* = \text{cl Im}(-(B^k)^*) = \text{cl Im}(-(B^*)^k),$$

其中第二个等式是引理 3.1.3 的结论(6)，加上闭包是因为$K^{**}=\text{cl}K$对任意凸锥K成立；第三个等式是因为定理 3.2.1 的结论(1)。记

$$M=\bigcap_{k\geqslant 1}\text{cl Im}(B^*)^k, \tag{3.2.5}$$

要证明$(L(\lambda))^*=\{0\}$，只要证明$M=\{0\}$。

如果$M\neq\{0\}$，则M是一个闭凸锥。我们用反证法来证明，$M\neq\{0\}$是不可能的，证明分以下 4 步完成。

(1) 对任意的k，$\text{Im}(B^*)^k$是闭集。

由于$\{0\}=(B^*)^{-k}(0)$，而$(B^*)^{-k}(0)=-(B^k)^*(0)=-(\text{dom } B^{-k})^*$，其中第一个等式是因为引理 3.1.3 的(2)，第二个等式是因为引理 3.1.3 的(5)和(4)。因此 dom $B^{-k}=\mathbb{R}^n$，即B^{-k}是严格的，于是根据定理 3.1.1 后的注，$\text{dom}(B^{-k})^*$是闭凸锥。再次由引理 3.1.3 的结论(2)，$-\text{dom}(B^{-k})^*=\text{dom}(B^*)^{-k}$，后者就是$\text{Im}(B^*)^k$。因此$\text{Im}(B^*)^k$是闭的，就是式(3.2.5)中的闭包可以去掉，$M=\bigcap_{k\geqslant 1}\text{Im}(B^*)^k$。

(2) 如果$x^*\in M$，那么$(B^*)^{-1}(x^*)\cap M\neq\varnothing$。

根据M的定义，$x^*\in M$就是$x^*\in\text{Im}(B^*)^k$对一切正整数k成立，就是存在y_k^*，使得$(B^*)^k(y_k^*)=x^*$，于是存在一个有限序列$\{y_{k,0}^*,y_{k,1}^*,\cdots,y_{k,k}^*\}$，使得

$$y_{k,k}^*=y_k^*, y_{k,k-1}^*\in B^*(y_k^*),\cdots,y_{k,1}^*\in B^*(y_{k,2}^*), y_{k,0}^*=x^*\in B^*(y_{k,1}^*),$$

即满足$y_{k,i}^*\in B^*(y_{k,i+1}^*)$，$i=1,2,\cdots,k$。根据$k$值可以得到一个二维序列如下：

$$\begin{aligned}
&k=1,\quad x^*,y_{1,1}^*;\\
&k=2,\quad x^*,y_{2,1}^*,y_{2,2}^*;\\
&\cdots\cdots\\
&k=n,\quad x^*,y_{n,1}^*,y_{n,2}^*,\cdots,y_{n,i}^*,\cdots,y_{n,n}^*;\\
&\cdots\cdots。
\end{aligned}$$

对这个序列纵向看，成立

$$y_{k,1}\in(B^*)^{-1}(x),k=1,\cdots;y_{k,2}\in(B^*)^{-2}(x^*),k=2,\cdots;\cdots;y_{k,i}\in(B^*)^{-i}(x^*),\cdots,k=i,\cdots。$$

根据本章定理 3.1.3，$\| B^{-k} \|$ 有界，再由定理 3.2.3 的结论(2)，对固定的 i，无限序列 $\{y^*_{k,i}, k=i, i+1, \cdots\}$ 有界，因此存在收敛子列。记 $\{y^*_{k_1,1}\} \subset \{y^*_{k,1}\}$ 为收敛子列，$\{y^*_{k_2,2}\} \subset \{y^*_{k_1,2}\}$ 为收敛子列，…。分别用 y^*_i 表示 $\{y^*_{k_i,i}\}$ 的极限，则 $y^*_i \in B^*(y^*_{i+1})$，由于对一切 i 成立，于是 $y^*_i \in (B^*)^2(y^*_{i+2})$，…，$y^*_i \in (B^*)^k(y^*_{i+k})$，…，就是 $y^*_i \in \mathrm{Im}(B^*)^k$，对一切 k。所以 $y^*_i \in M$。特别对 y^*_1，$y^*_1 \in (B^*)^{-1}(x^*) \cap M$。

(3) M 不包含一个子空间，即 $M \cap (-M) = \{0\}$。

设 $N = M \cap (-M)$，如果存在非零的 $q \in N \subset M$，根据上面(2)的证明 $(B^*)^{-1}(q) \cap M \neq \emptyset$。又由于 $M \subset \mathrm{Im}B^* = \mathrm{dom}(B^*)^{-1}$，而 $N \subset \mathrm{dom}(B^*)^{-1} \cap (-\mathrm{dom}(B^*)^{-1})$，因此 $(B^*)^{-1}$ 限制在 N 上是一个单值线性映射，所以由 $(B^*)^{-1}(q) \cap M \neq \emptyset$ 得到 $(B^*)^{-1}(q) \in M$。同理由 $-q \in N$，可以得到 $(B^*)^{-1}(-q) \in M$。再由于 $(B^*)^{-1}$ 在 N 是一个单值线性映射，得到 $(B^*)^{-1}(-q) = -(B^*)^{-1}(q)$，最后 $(B^*)^{-1}(q) \in N$。根据在本引理证明中的第一部分，$(B^*)^{-1}(0) = \{0\}$，所以在 N 上，线性映射 $(B^*)^{-1}$ 是满的，这意味着在 N 上，$(B^*)^{-1}$ 是可逆映射，即 B^* 是 N 到 N 的可逆映射。这样 $B^*(N) \subset N$，N 是 B^* 不变子空间。根据定理前面的说明，S 是包含在 $\mathrm{dom}\, B^* \cap (-\mathrm{dom}\, B^*)$ 中最大不变子空间，$N \subset S = \{0\}$，后面的等式是定理的条件。这与存在非零的 $q \in N$ 矛盾。

(4) 于是对于凸过程 $(B^*)^{-1}$ 来说，引理 3.2.1 的条件全部满足，存在特性向量 $x^* \in M$，$x^* \neq 0$，它对应的特征值 μ 是非负的。因为 $\{0\} = (B^*)^{-1}(0)$，所以 $\mu > 0$。这样

$$\mu x^* \in (B^*)^{-1}(x^*) = (A^* - \lambda I)^{-1}(x^*),$$

或者写成

$$\left(\lambda + \frac{1}{\mu}\right) x^* \in A^*(x^*),$$

这与 $\lambda > \lambda_M(A^*)$ 矛盾。这个矛盾说明 M 中没有非零向量，进一步 M 不是非零的。 □

注 1 因为 $L_k(\lambda) \subset L_{k+1}(\lambda)$，如果 $L_k(\lambda) = L_{k+1}(\lambda)$，则

$$L_{k+2}(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} L_{k+1}(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} L_k(\lambda) = L_{k+1}(\lambda),$$

进一步可得 $L_{k+i}(\lambda) = L_k(\lambda)$，$i = 1, 2, \cdots$。 □

注 2 如果存在正整数 k，使得 $L_k(\lambda) = L_{k+1}(\lambda)$，用 k_0 表示最小的使得 $L_k(\lambda) = L_{k+1}(\lambda)$ 的正整数，则在定理 3.2.4 的条件下，$L_{k_0}(\lambda) = \mathbb{R}^n$，就是 $(A - \lambda I)^{-k_0}(0) = \mathbb{R}^n$，或者 $\mathrm{Im}(A^* - \lambda I)^{k_0} = \{0\}$。

进一步，存在 $x \neq 0$，$(A - \lambda I)^{k_0}(x) = 0$，和 $y_1, y_2, \cdots, y_{k_0}$，使得

$$\begin{aligned}
&\lambda y_1 \in A(y_1),\\
&y_1 + \lambda y_2 \in A(y_2),\\
&\cdots\cdots\\
&y_{k_0 - 1} + \lambda y_{k_0} \in A(y_{k_0}),\\
&y_{k_0} = x。
\end{aligned}$$

这里的 y_1 是 A 关于 λ 的特征向量。因而凸过程可以有无穷多个特征值。 □

定理 3.2.5　在定理 3.2.4 的条件下，$k_0<\infty$。

证明：存在以 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 为顶点的单纯形，使得 $0\in\operatorname{int}\operatorname{co}(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$。因为 $L(\lambda)=\mathbb{R}^n$，所以存在 k_i，使得 $x_i\in L_{k_i}(\lambda)$。令 $k_0=\max\limits_i\{k_i\}$，那么对于任意的 $x\in\operatorname{co}(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$，$x\in L_{k_0}(\lambda)$。由于 $0\in\operatorname{int}\operatorname{co}(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$，所以存在原点的一个邻域 $B(0,\varepsilon)$，使得 $B(0,\varepsilon)\subset L_{k_0}(\lambda)$。因为 $L_{k_0}(\lambda)$ 为锥，因此任意的 $x\in L_{k_0}(\lambda)$。□

回忆一些代数知识。设 X 是一个线性(赋范)空间，V 是 X 的一个子空间，那么可以得到 X 关于 V 的商空间 X/V，X/V 的元素 $\hat{x}$ 代表 x 所在的等价类 $x+V$。$P:X\to X/V$ 称为自然投影(简称投影)，它将 $x\in X$ 映射到 $\hat{x}$。P 是有界线性映射，它的范数为 1。

设 $A:X\to X$ 是一个线性映射，V 是 A 不变子空间，那么 A 可以诱导出一个线性映射 $\overline{A}:X/V\to X/V$，$\overline{A}$ 将 $\hat{x}$ 映射到 $\widehat{Ax}$。就是 $\overline{A}\,\hat{x}=\widehat{Ax}=PAx$，而 $\overline{A}\,\hat{x}=\overline{A}Px$，所以 $PA=\overline{A}P$。在代数学中，常将这个事实画成交换图 3.1。

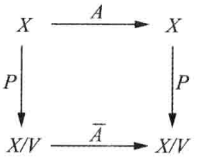


图 3.1　$\overline{A}$ 的交换图

如果 $\dim V=\nu$，从 V 中选取一组基 $\{x_{n-\nu+1},x_{n-\nu+2},\cdots,x_n\}$，然后再将它扩充成 X 的基 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-\nu};x_{n-\nu+1},x_{n-\nu+2},\cdots,x_n\}$，在这组基下，$A$ 可以分解成

$$\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & A_V\end{bmatrix},$$

X/V 同构于 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-\nu}\}$，而 $P=[I\ \ 0]$，$\overline{A}=A_{11}$。

现在回到凸过程，并且将 X 取成 $\mathbb{R}^n$。$A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个凸过程，V 是 A 的一个不变子空间，参照前文的做法，定义 A 在商空间 X/V 上的诱导映射 $\overline{A}:X/V\to X/V$，它满足 $PA=\overline{A}P$。

对于 $\overline{A}$，下面的性质是基本的。

引理 3.2.3　(1) 集合值映射 $\overline{A}$ 是合理的，即对于 X/V 中同一类的代表 $\hat{x}=\hat{y}(y\in x+V)$，有 $\overline{A}(\hat{x})=\overline{A}(\hat{y})$(就是 $\widehat{A(x)}=\widehat{A(y)}$)。

(2) $\hat{y}\in\overline{A}(\hat{x})$ 的充分必要条件是 $(y+V)\cap A(x)\neq\varnothing$。

(3) $\overline{A}$ 是凸过程。

(4) 如果 A 是闭凸过程，则 $\overline{A}$ 也是闭凸过程。

证明：(1) 如果 $\hat{x}=\hat{y}$，就是 $y\in x+V$，或者写成存在 $v\in V$，$y=x+v$。那么 $A(y)=A(x+v)\supset A(x)+A(v)$，因为 V 是 A 的不变子空间，所以 $A(y)+V\supset A(x)+V$。同理可以得到 $A(x)+V\supset A(y)+V$，因此 $A(x)+V=A(y)+V$，就是 $\widehat{A(x)}=\widehat{A(y)}$，这说明对于集合值映射图 3.1 依然成立。

(2) $\hat{y}\in\overline{A}(\hat{x})$ 就是 $\hat{y}\in\widehat{A(x)}$，根据商空间的定义 $y\in A(x)+V$，就是 $(y+V)\cap A(x)\neq\varnothing$。

上述过程可以反向推导。

(3) 因为 A 是凸过程，即 graA 是凸集。就是对于$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in \mathrm{gra}A$，成立

$$\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\in \lambda A(x_1)+(1-\lambda)A(x_2)\subset A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)。$$

两边都作投影 P，得到

$$P(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\in PA(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2),$$

就是

$$\lambda \hat{y}_1+(1-\lambda)\hat{y}_2\in \overline{A}P(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=\overline{A}(\lambda \hat{x}_1+(1-\lambda)\hat{x}_2)。$$

(4) 这是因为有限维子空间总是闭的和 P 是连续的。 □

在下面的讨论中，将 V 取成 T，根据定义 T 是一个最小的 A 不变子空间，再由以前的定义，$T^{\perp}=S$，S 是包含在 dom $A^*\cap(-\mathrm{dom}\,A^*)$中最大的 A^*不变子空间。根据线性代数知识，S 同构于$\mathbb{R}^n/T$。记 dim$S=\nu$，存在$\mathbb{R}^n$的一组基，在这组基下，S 和 T 中的向量分别具有$(x_1\ \cdots\ x_\nu\ 0\ \cdots\ 0)^{\mathrm{T}}$和$(0\ \cdots\ 0\ x_{\nu+1}\ \cdots\ x_n)^{\mathrm{T}}$的形式。$\mathbb{R}^n/T$ 中的向量具有$(x_1\ \cdots\ x_\nu)^{\mathrm{T}}$的形式，因此可以看成与 S 中的向量一样。在这组基下，$\overline{A}(\hat{x})=PA((\hat{x}^{\mathrm{T}}0)^{\mathrm{T}})$。

引理 3.2.4 设 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是一个严格的闭凸过程，$S$ 和 T 的意义由前面定义。$\overline{A}$ 是 A 在$\mathbb{R}^n/T$ 上的诱导映射，那么：

(1) 集合值映射 $\overline{A}:\mathbb{R}^n/T\to\mathbb{R}^n/T$ 是单值的线性映射。

(2) $(\overline{A})^*=A^*|_S$。

证明：(1) 我们只要证明 $\overline{A}(\hat{x})=PA((\hat{x}^{\mathrm{T}}0)^{\mathrm{T}})$只有一个元素，那么它一定是单值线性的。

如果对某个$\hat{x}$，存在 $p,q\in\overline{A}(\hat{x})$，$p\neq q$。那么必然存在 $s^*\in S$ 使得$\langle p,s^*\rangle<\langle q,s^*\rangle$。另一方面，根据伴随映射的定义，应该成立$\langle x,A^*(s^*)\rangle\leqslant\langle p,s^*\rangle$。由于在 S 上 A^*是单值的线性映射，所以 $A^*(-s^*)=-A^*(s^*)$，同样由伴随映射的定义，$\langle x,A^*(-s^*)\rangle\leqslant\langle p,-s^*\rangle$，所以只有$\langle x,A^*(s^*)\rangle=\langle p,s^*\rangle$。同理$\langle x,A^*(s^*)\rangle=\langle q,s^*\rangle$，因此$\langle p,s^*\rangle=\langle q,s^*\rangle$。这个矛盾说明 $\overline{A}(\hat{x})$只有一个元素。

(2) $\overline{A}(\hat{x})=PA([\hat{x}^{\mathrm{T}}0]^{\mathrm{T}})$，所以根据定理 3.2.1，$\overline{A}^*(\hat{x})=A^*P^*((\hat{x}^{\mathrm{T}}0)^{\mathrm{T}})=A^*|_S$。 □

下面的结论是关于伴随映射的。已知 S 是 A^*的不变子空间。

推论 3.2.1 设 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是一个严格的闭凸过程，$S$ 和 T 的意义由前面定义。A^*是 A 的伴随映射，$\overline{(A^*)}$是 A^*在$\mathbb{R}^n/S$ 上的诱导映射，那么：

(1) $\overline{(A^*)}:\mathbb{R}^n/S\to\mathbb{R}^n/S$ 是凸过程。

(2) $x^*\in\overline{(A^*)}(\hat{y}^*)$的充分必要条件是$(x^*+I)\cap A^*(y^*)\neq\varnothing$。

(3) $\overline{(A^*)}=(A|_T)^*$。

(4) dom $\overline{(A^*)}$不包含$\overline{(A^*)}$的不变子空间。

(5) $\overline{(A^*)}$的特征值必定是 A^*的特征值。

证明：由于结论(1)，(2)，(3)的证明与引理 3.2.3 和 3.2.4 的相应结论相似，在此略去，仅证明结论(4)和(5)。

(4) P 表示从$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n/S$ 的自然投影。设$\hat{N}$是 dom $\overline{(A^*)}$中的$\overline{(A^*)}$不变子空间，即

$\overline{(A^*)}(\hat{N})\subset\hat{N}$，就是$\overline{(A^*)}P(\hat{N}+S)\subset\hat{N}$。根据图3.1，$\overline{(A^*)}P=PA^*$，$PA^*(\hat{N}+S)\subset\hat{N}=P(\hat{N}+S)$，所以$A^*(\hat{N}+S)\subset\hat{N}+S$。在dom $A^*\cap(-\text{dom } A^*)$中存在一个包含$S$的不变子空间$\hat{N}+S$，这与$S$是最大的不变子空间矛盾。因此$\hat{N}=0$。

(5) 设λ是$\overline{(A^*)}$的特征值，不妨假定λ不是A^*的特征值。因为λ是$\overline{(A^*)}$的特征值，所以存在$\hat{y}^*\in R^n/S$，$\hat{y}^*\neq 0$，可以认为$\hat{y}^*\in T$，使得$\lambda\hat{y}^*\in\overline{(A^*)}(\hat{y}^*)$，就是$\lambda\hat{y}^*\in\widehat{A^*(\hat{y}^*)}$，就是存在$s\in S$，$\lambda\hat{y}^*\in A^*(\hat{y}^*)+s$。因为$\lambda$不是$A^*$的特征值，所以$s\neq 0$，其次，限制在$S$上，$(A^*-\lambda I)$是1-1映射，因此，存在$s_0\in S$，使得$(A^*-\lambda I)s_0=s$，代入$\lambda\hat{y}^*\in A^*(\hat{y}^*)+s$，得到$\lambda\hat{y}^*\in A^*(\hat{y}^*)+A^*(s_0)-\lambda s_0$，就是$\lambda(\hat{y}^*+s_0)\in A^*(\hat{y}^*)+A^*(s_0)\subset A^*(\hat{y}^*+s_0)$。矛盾。　□

综合定理3.2.4，引理3.2.4和推论3.2.1可以得到下面的定理。

定理3.2.6　设$A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是严格闭的凸过程，$\lambda>\lambda_M(A^*)$，令$T$和$S$如引理3.2.2前面所定义，那么：

(1) A在$\mathbb{R}^n/T$上的诱导映射$\bar{A}$是单值的线性映射，$\bar{A}$的伴随映射等同于A^*在S上的限制。

(2) 存在正整数k，使得$T=((A-\lambda I)|_T)^{-k}(0)$。　□

定理3.2.6的第一个结论是引理3.2.4，第二个结论是由定理3.2.5推演出来的。它说明如果将$\mathbb{R}^n$分解成$\mathbb{R}^n=T\oplus S$，其中$\oplus$表示子空间的直和，那么一个严格的闭凸过程A在S上的限制是一个单值的线性映射和T中的子集的和；如果$x\in T$，那么存在$y_i\in T$，$i=1,2,\cdots,k$，使得

$$\begin{aligned}&\lambda y_1\in A(y_1),\\&y_1+\lambda y_2\in A(y_2),\\&\cdots\cdots\\&y_{k-1}+\lambda y_k\in A(y_k),\\&y_k=x。\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

式(3.2.6)说明T上的任何元素都具有相当于Jordan型的循环结构。这种结构上的相似性支持了凸过程可以看成是单值线性映射在集合值映射中的一个合理推广。

练习

1. 证明：$A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是凸过程，那么
 $(\text{Im}(A))^*=(A^*)^{-1}(0)$，$(\text{dom}(A^*))^*=A(0)$。
 并用此结论证明ImA在$\mathbb{R}^m$中稠密当且仅当$(A^*)^{-1}(0)=\{0\}$。
2. 如果$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$K$是$\mathbb{R}^m$中的一个凸锥，设$\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是集合值映射，$\mathcal{A}(x)=Ax+K$，证明$\mathcal{A}(x)$是一个凸过程，并且求$\mathcal{A}^*(x^*)$。
3. 设$A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是一个有界的闭凸过程，如果$x,x_0\in\text{dom } A$，$x\to x_0$，则$A(x)\to A(x_0)$。(这里，$A(x)\to A(x_0)(x\to x_0)$是指对于任意一个集合$S=\{y,y\in A(x)\}$，$S$的聚点属于$A(x_0)$。这等价于对于任意序列$x_i\in\text{dom } A$，$x_i\to x_0(i\to\infty)$，和收敛序列$\{y_i,y_i\in A(x_i)\}$，$y_i\to y_0(i\to\infty)$，则$y_0\in A(x_0)$。)
4. 证明：如果A是凸过程，I是恒等的单值映射，那么集合值映射$A-\lambda I$也是凸过程。

5. 证明引理 3.2.1 第二部分证明中的 ω_k 是有界的。

6. 解释式(3.2.6)的第一式和引理 3.2.2 的一致性。

7. 记 $B_\lambda = A - \lambda I$，其中 A 是凸过程。证明：

 (1) $\mathrm{dom}\, B = \mathrm{dom}\, A$，$\mathrm{dom}\, B^* = \mathrm{dom}\, A^*$。

 (2) 一个凸锥或者子空间是 A 不变的充分必要条件它是 B 不变的。

 (3) 一个凸锥或者子空间是 A^* 不变的充分必要条件它是 B^* 不变的。

8. S 和 T 由引理 3.2.2 前所定义，那么对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$，存在唯一的分解 $x = x_S + x_T$，证明：

 (1) 存在两个映射，$A_S^*: S \to S$ 是单值线性映射，$A_T^*: T \to \mathbb{R}^n$ 为凸过程，使得

$$A^* y^* = A_S^* y_S^* + A_T^* y_T^* = [A_S^* \quad A_T^*] \begin{bmatrix} y_S^* \\ y_T^* \end{bmatrix}。$$

 (2) $A^{**}(x) = \begin{bmatrix} A_S x_S \\ A_T^{**} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_S x_S \\ -A_T(-x) \end{bmatrix}$。

3.3　凸过程微分包含的能控性

本节开始讨论凸过程微分包含系统，

$$\dot{x}(t) \in A(x(t)), \tag{3.3.1}$$

假定其中 A 总是严格的闭凸过程。由定理 3.2.3，A 是 Lipschitz 过程，并且它的 Lipschitz 常数可以取成 $\|A\|$。为了方便，以后将式(3.3.1)称为**凸系统**。A^* 是 A 的伴随过程，下列微分包含系统

$$\dot{y}^*(t) \in -A^*(y^*(t))。 \tag{3.3.2}$$

称是凸系统(3.3.1)的**对偶系统**。根据定理 3.1.1，A^* 也是闭凸过程，根据式(3.1.5)，对偶系统(3.3.2)也是 Lipschitz 微分包含；进一步根据定理 2.3.3 以及后面的推论，式(3.3.1)和式(3.3.2)的解都存在。由于 A 和 A^* 都是凸过程，因此 $0 \in A(0)$ 和 $0 \in A^*(0)$，就是原点是这两个系统的平衡点。

本节讨论凸系统的能控性。

3.3.1　*T*-能控性

本书的 2.4 节讨论过微分包含的可达集，可达是对轨线的终点而言的，证明了可达集是弧连通的。本节讨论的能控性是针对轨线起点的，尽管本书只讨论凸系统的能控性，但是能控性的概念可以推广到其他微分包含系统。

定义 3.3.1　考虑凸系统(3.3.1)，定义集合 P_T 如下：

$$P_T = \{p \in \mathbb{R}^n; \text{存在 } x(t) \in S_{[0,T]}(A,p), \text{使得 } x(T) = 0\},$$

P_T 称为凸系统(3.3.1)在 T 时的能控集，也称 ***T*-能控集**。 □

熟悉线性控制系统理论的读者可以发现，凸系统能控性的定义与线性系统的是吻合的。

引理 3.3.1　用 $S(A,x_0)$ 表示初始条件 $x(0)=x_0$ 的凸系统(3.3.1)的解集。如果 $x(t) \in S(A,x_0)$，那么对任意的 $\alpha \geqslant 0$，$\alpha x(t) \in S(A,\alpha x_0)$；如果 $x_i(t) \in S(A,x_{i0})$，$i=1,2$，那么 $(x_1(t)+x_2(t)) \in S(A,x_{10}+x_{20})$。

证明：因为 $\dot{x}(t) \in A(x(t))$，所以 $\alpha\dot{x}(t) \in \alpha A(x(t)) = A(\alpha x(t))$，而且 $\alpha x(0) = \alpha x_0$。因为 $\dot{x}_1(t)+\dot{x}_2(t) \in A(x_1(t))+A(x_2(t)) \subset A(x_1(t)+x_2(t))$，而且 $x_1(0)+x_2(0)=x_{10}+x_{20}$。 □

应用引理 3.3.1，立即可以看出 P_T 是凸锥。

另外定义集合

$$Q_T = \{q \in \mathbb{R}^n; \text{存在 } y^*(t) \in S_{[0,T]}(-A^*,q)\}。$$

注意在定义集合 Q_T 时，没有对终点状态 $y^*(T)$ 作任何要求。显然由引理 3.3.1，Q_T 也是凸锥。

从本章前两节看到，伴随映射 A^* 比 A 有更多确定的性质，例如 $A^*(0)=\{0\}$，只有唯一的零元素；A^* 限制在任意一个子空间上是线性单值映射；因此，经常利用 A^* 来研究 A 的特征，例如在本章 3.2 节中通过 A^* 来研究 A 的结构，本节在讨论能控性的时候也经常用到 A^*。下面的引理给出一个简单事实。

引理 3.3.2 $S_{[0,T]}(-A^*,0)=\{0\}$。

证明：根据定理 3.2.3 的(2)，$\|\dot{y}^*(t)\|\leqslant\|A\|\|y^*(t)\|$，应用 Gronwall 不等式(引理 2.3.1)立即可以得到对偶系统(3.3.2)在初始条件为 0 时只有零解。 □

由于 $0\in A(0)$，因此当 $T_1\leqslant T_2$ 时，成立 $P_{T_1}\subset P_{T_2}$。而根据定义当 $T_1\leqslant T_2$ 时，$Q_{T_1}\supset Q_{T_2}$。下面的定理给出 P_T 和 Q_T 的对偶关系。

定理 3.3.1

$$P_T^*=-Q_T。$$

证明：任意取定 $q\in Q_T$，那么存在 $y^*(t)\in S_{[0,T]}(-A^*,q)$。再任取 $p\in P_T$，那么存在 $x(t)\in S_{[0,T]}(A,p)$，$x(T)=0$。因为

$$\begin{aligned}\langle p,q\rangle&=\langle x(0),y^*(0)\rangle=\langle x(0),y^*(0)\rangle-\langle x(T),y^*(T)\rangle\\&=-\int_0^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x(t),y^*(t)\rangle\mathrm{d}t=-\int_0^T\langle\dot{x}(t),y^*(t)\rangle+\langle x(t),\dot{y}^*(t)\rangle\mathrm{d}t\leqslant 0,\end{aligned}$$

所以 $-q\in P_T^*$，即 $-Q_T\subset P_T^*$。

下面证明 $-Q_T\supset P_T^*$，即任意取定 $-q\in P_T^*$，要求证明 $q\in Q_T$。证明分成以下三步。

(1) 构造序列 $\{\hat{v}_1,\hat{v}_2,\cdots,\hat{v}_N\}$。

任意取定整数 N，记 $\tau=\dfrac{T}{N}$，考虑下列带约束的优化问题：

$$\begin{aligned}&\inf\Psi(\bar{v})=\tau\sum_{k=1}^N\langle q,v_k\rangle+\tau\sum_{k=1}^N\langle v_k,v_k\rangle=\tau\langle\bar{q},\bar{v}\rangle+\|\bar{v}\|^2,\\&\qquad\text{s.t. }\Lambda\bar{v}\in K,\end{aligned}$$

其中，$\bar{q}=(\overbrace{q^{\mathrm{T}}\ \ q^{\mathrm{T}}\ \cdots\ q^{\mathrm{T}}}^{N})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{Nn}$，$\bar{v}=(v_N^{\mathrm{T}}\ v_{N-1}^{\mathrm{T}}\ \cdots\ v_2^{\mathrm{T}}\ v_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{Nn}$，$\bar{v}$ 的分量 v_k，$k=1,2,\cdots,N$，满足

$$\begin{aligned}&v_N\in A(0),\\&v_{N-1}\in A(-\tau v_N),\\&\cdots\cdots\\&v_1\in A(-\tau(v_N+v_{N-1}+\cdots+v_2));\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

$$K=\{(u_N^{\mathrm{T}},\cdots,u_1^{\mathrm{T}},v_N^{\mathrm{T}},\cdots,x_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{2Nn};(u_k^{\mathrm{T}},v_k^{\mathrm{T}})\in\mathrm{gra}A,1,2,\cdots,N\};$$

$$\begin{aligned}\Lambda\bar{v}&=\Lambda(v_N^{\mathrm{T}}\ v_{N-1}^{\mathrm{T}}\ \cdots\ v_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\\&=[0^{\mathrm{T}}\ -\tau v_N^{\mathrm{T}}\ -\tau(v_N^{\mathrm{T}}+v_{N-1}^{\mathrm{T}})\ \cdots\ -\tau(v_N^{\mathrm{T}}+v_{N-1}^{\mathrm{T}}\ \cdots+v_2^{\mathrm{T}})\ \cdots\ v_N^{\mathrm{T}}\ v_{N-1}^{\mathrm{T}}\ \cdots\ v_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

即

$$\Lambda=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\tau I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\tau I & -\tau I & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\tau I & -\tau I & -\tau I & \cdots & 0 \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2Nn\times Nn}, \tag{3.3.4}$$

其中 $I\in\mathbb{R}^{n\times n}$是单位矩阵。

根据式(3.3.3)成立 $\Lambda\bar{v}\in K$。又由于 Λ 的下方是 $Nn\times Nn$ 单位矩阵，而 A 是严格的，因此 K 的前 Nn 分量可以张成$\mathbb{R}^{Nn}$，所以

$$\Lambda\mathbb{R}^{Nn}-K=\mathbb{R}^{2Nn}。 \tag{3.3.5}$$

当 $\bar{v}\to\infty$时，$\Psi(\bar{v})\to\infty$，因此存在 M，$\Psi(\bar{v})$的下确界可以在集合 $\|\bar{v}\|\leqslant M$ 中求取。由于 A 是闭凸过程，$K\cap\Lambda\{\bar{v};\|\bar{v}\|\leqslant M\}$ 是闭集，因此存在 $\hat{v}\in\{\bar{v};\|\bar{v}\|\leqslant M\}$，使得 $\Psi(\hat{v})=\min\limits_{\|\bar{v}\|\leqslant M}\Psi(\bar{v})=\inf\Psi(\bar{v})$。记$\hat{v}=(\hat{v}_N^{\mathrm{T}}\ \ \hat{v}_{N-1}^{\mathrm{T}}\ \cdots\ \hat{v}_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，即得序列$\{\hat{v}_1,\hat{v}_2,\cdots,\hat{v}_N\}$，它满足式(3.3.3)。

(2) $\hat{v}$和 $\Psi(\hat{v})$的性质。

这里导出$\hat{v}$以及 $\Psi(\hat{v})$的一些性质。首先，由于 $\Psi(0)=0$，因此 $0\geqslant\Psi(\hat{v})$。下面推导关于$\hat{v}$的等式。

定义一个新的函数

$$\Phi(\bar{v})=\Psi(\bar{v})+\delta(\bar{v},\Lambda^{-1}K)=\tau\langle\bar{q},\bar{v}\rangle+\tau\|\bar{v}\|^2+\delta(\bar{v},\Lambda^{-1}K),$$

那么成立 $\Phi(\hat{v})=\min\limits_{\bar{v}\in\Lambda^{-1}K}\Phi(\bar{v})=\inf\limits_{\bar{v}\in\Lambda^{-1}K}\Phi(\bar{v})=\inf\limits_{\bar{v}\in\Lambda^{-1}K}\Psi(\bar{v})=\min\limits_{\bar{v}\in\Lambda^{-1}K}\Psi(\bar{v})=\Psi(\hat{v})$，注意其中的 Λ^{-1}应该理解为集合值映射。

由于 $\|\bar{v}\|^2$ 是凸函数和 $\Lambda^{-1}K$ 是凸集，容易证明 $\Phi(\bar{v})$是凸函数，根据定理 1.3.6，$0\in\partial\Phi(\hat{v})$。就是

$$0\in\partial\Phi(\hat{v})=\tau\bar{q}+2\tau\hat{v}+\partial\delta(\hat{v},\Lambda^{-1}K)=\tau\bar{q}+2\tau\hat{v}-(\Lambda^{-1}K)^*,$$

这里我们应用了$\partial\delta(\hat{v},\Lambda^{-1}K)=-(\Lambda^{-1}K)^*$的事实，读者可以试证明它。由式(3.3.5)，再应用 $(\Lambda^{-1}K)^*=\Lambda^*K^*$(第 2 章第 1 节练习 7(4))，

$$0\in\tau\bar{q}+2\tau\hat{v}-\Lambda^*K^*。$$

这说明存在$(\bar{x}^*,\bar{v}^*)\in K^*$，使得

$$0=\tau\bar{q}+2\tau\hat{v}-\Lambda^*(\bar{x}^*,\bar{v}^*),$$

应用式(3.3.4)立即得到

$$\begin{aligned}&\tau(q^{\mathrm{T}}q^{\mathrm{T}}\ \cdots\ q^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}+2\tau(\hat{v}_N^{\mathrm{T}}\ \ \hat{v}_{N-1}^{\mathrm{T}}\ \cdots\ \hat{v}_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\\&=\Big[\Big(-\tau\sum_{k=1}^{N-1}x_k^*+v_N^*\Big)^{\mathrm{T}}\ \ \Big(-\tau\sum_{k=1}^{N-2}x_k^*+v_{N-1}^*\Big)^{\mathrm{T}}\ \cdots\ (-\tau x_1^*+v_2^*)^{\mathrm{T}}\ \ (v_1^*)^{\mathrm{T}}\Big]^{\mathrm{T}}。\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

下面讨论向量$\hat{v}_k, k=1,2,\cdots,N$的有界性。

构造一个分段线性的连续函数$\hat{x}(t)$如下：

$$\hat{x}(t)=\begin{cases}(t-k\tau)\,\hat{v}_k-\tau(\hat{v}_{k+1}+\cdots+\hat{v}_N), & t\in[(k-1)\tau,k\tau], k=1,2,\cdots,N-1,\\ (t-N\tau)\,\hat{v}_N, & t\in[(N-1)\tau,N\tau]。\end{cases}$$

则$\hat{x}(T)=\hat{x}(N\tau)=0$。应用定理 2.3.3，取$M=\{\hat{x}(t)\}, r_0(x)=x$，那么对任意的$p\in P_T$，存在$\tilde{x}(t)\in S_{[0,T]}(A,p)$，使得

$$\|\hat{x}(t)-\tilde{x}(t)\|\leqslant\int_t^T \mathrm{e}^{\|A\|(T-s)}d(\dot{\hat{x}}(s),A(\hat{x}(s))\mathrm{d}s,$$

其中$d(\hat{x}(s),A(\hat{x}(s))$的$d$是距离函数，它表示$\hat{x}(s)$和$A(\hat{x}(s)$距离。特别

$$\|\hat{x}(0)-\tilde{x}(0)\|\leqslant\int_0^T \mathrm{e}^{\|A\|(T-s)}d(\dot{\hat{x}}(s),A(\hat{x}(s))\mathrm{d}s\leqslant \mathrm{e}^{\|A\|T}\int_0^T d(\dot{\hat{x}}(s),A(\hat{x}(s))\mathrm{d}s。$$

考察

$$\begin{aligned}\int_0^T d(\dot{\hat{x}}(s),A(\hat{x}(s)))\mathrm{d}s&=\sum_{k=1}^N\int_{(k-1)\tau}^{k\tau} d(\dot{\hat{x}}(s),A(\hat{x}(s)))\mathrm{d}s\\ &\leqslant\sum_{k=1}^N\int_{(k-1)\tau}^{k\tau}[d(\hat{v}_k,A(\hat{x}(k\tau)))+d(A(\hat{x}(s)),A(\hat{x}(k\tau)))]\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

由于$\hat{x}(k\tau)=-\tau(\hat{v}_{k+1}+\cdots+\hat{v}_N)$，根据式(3.3.3)，$\hat{v}_k\in A(\hat{x}(k\tau))$，因此$d(\hat{v}_k,A(\hat{x}(k\tau)))=0$。而$d(A(\hat{x}(s)),A(\hat{x}(k\tau)))\leqslant\|A\|\|\hat{x}(s)-\hat{x}(k\tau)\|=\|A\|\|\hat{v}_k\||s-k\tau|$，所以得到

$$\int_0^T d(\dot{\hat{x}}(s),A(\hat{x}(s)))\mathrm{d}s\leqslant\|A\|\sum_{k=1}^N\|\hat{v}_k\|\int_{(k-1)\tau}^{k\tau}|s-k\tau|\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\|A\|\tau^2\sum_{k=1}^N\|\hat{v}_k\|。$$

于是得到

$$\|\hat{x}(0)-\tilde{x}(0)\|\leqslant\frac{1}{2}\mathrm{e}^{T\|A\|}\|A\|\tau^2\sum_{k=1}^N\|\hat{v}_k\|。\tag{3.3.7}$$

回忆$\Psi(\bar{v})=\tau\left\langle q,\sum_{k=1}^N\bar{v}_k\right\rangle+\tau\sum_{k=1}^N\|\bar{v}_k\|^2$，在上述证明的(1)中得到$0\geqslant\Psi(\hat{v})=\tau\left\langle q,\sum_{k=1}^N\hat{v}_k\right\rangle+\tau\sum_{k=1}^N\|\hat{v}_k\|^2$。注意到$\hat{x}(0)=-\tau\sum_{k=1}^N\hat{v}_k$，因此$\tau\left\langle q,\sum_{k=1}^N\hat{v}_k\right\rangle=\langle -q,\hat{x}(0)\rangle$，进一步得到，

$$\begin{aligned}0&\geqslant\langle -q,\hat{x}(0)\rangle+\tau\sum_{k=1}^N\|\hat{v}_k\|^2+\langle q,\tilde{x}(0)\rangle-\langle q,\tilde{x}(0)\rangle\\ &\geqslant\langle q,\tilde{x}(0)-\hat{x}(0)\rangle+\tau\sum_{k=1}^N\|\hat{v}_k\|^2\\ &\geqslant-\|q\|\|\tilde{x}(0)-\hat{x}(0)\|+\tau\sum_{k=1}^N\|\hat{v}_k\|^2,\end{aligned}$$

其中用到$\langle -q,\tilde{x}(0)\rangle\geqslant 0$，这是因为$-q\in P_T^*,\tilde{x}(0)\in P_T$。结合式(3.3.7)得到

$$\tau\sum_{k=1}^N\|\hat{v}_k\|^2\leqslant\|q\|\|\tilde{x}(0)-\hat{x}(0)\|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{T\|A\|}\,\|q\|\,\|A\|\tau^2\sum_{k=1}^{N}\|\hat{v}_k\|$$

$$\leqslant c\tau^2\sum_{k=1}^{N}\|\hat{v}_k\|,$$

其中 $c=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{T\|A\|}\,\|q\|\,\|A\|$。应用不等式 $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$，得到 $\sum_{k=1}^{N}\|\hat{v}_k\|^2\leqslant c\tau\sqrt{N\sum_{k=1}^{N}\|\hat{v}_k\|^2}$，利用 $N\tau=T$，因而对一切 $i=1,2,\cdots,N$ 成立

$$\|\hat{v}_i\|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\|\hat{v}_k\|^2}\leqslant\frac{cT}{\sqrt{N}}。\tag{3.3.8}$$

(3) 构造解 $y^*(t)\in S_{[0,T]}(-A^*,q)$。

将式(3.3.6)写成分量的形式，得到

$$\begin{aligned}
&\tau q+2\tau\hat{v}_1=v_1^*,\\
&\tau q+2\tau\hat{v}_2=-\tau x_1^*+v_2^*,\\
&\cdots\cdots\\
&\tau q+2\tau\hat{v}_N=-\tau(x_{N-1}^*+\cdots+x_1^*)+v_N^*。
\end{aligned}\tag{3.3.9}$$

$(x^*,v^*)\in K^*$ 蕴含 $(v_k^*,x_k^*)\in\mathrm{gra}(-A^*)$，$k=1,2,\cdots,N$。令 $\hat{y}_k^*=\frac{x_k^*}{\tau}$，$k=1,2,\cdots,N$，由式(3.3.9)的第一式得到 $\tau\hat{y}_1^*\in-A^*(\tau q+2\tau\hat{v}_1)$，就是 $\hat{y}_1^*\in-A^*(q+2\hat{v}_1)$；类似地，由式(3.3.9)的第二式得到 $\hat{y}_2^*\in-A^*(q+\tau y_1^*+2\hat{v}_2)$，一般式为

$$\hat{y}_k^*\in-A^*(q+\tau(y_1^*+\cdots y_{k-1}^*)+2\hat{v}_k)。\tag{3.3.10}$$

应用 $\hat{y}_k^*$ 构造函数 $y_N^*(t)$ 如下：

$$y_N^*(t)=\begin{cases}
q+t\hat{y}_1^*, & t\in[0,\tau],\\
\cdots\cdots & \\
q+\tau(\hat{y}_1^*+\cdots\hat{y}_k^*)+(t-k\tau)\hat{y}_{k+1}^*, & t\in[k\tau,(k+1)\tau],\\
\cdots\cdots & \\
q+\tau(\hat{y}_1^*+\cdots\hat{y}_{N-1}^*)+(t-(N-1)\tau)\hat{y}_N^*, & t\in[(N-1)\tau,N\tau]。
\end{cases}$$

$y_N^*(t)$ 满足：

ⅰ. $y_N^*(0)=q$。

ⅱ. $\dot{y}_N^*(t)=\hat{y}_{k+1}^*\in-A^*(q+\tau(\hat{y}_1^*+\cdots+\hat{y}_k^*)+2\hat{v}_k)$，$t\in[k\tau,(k+1)\tau]$。

如果设 $z_N^*(t)=2\hat{v}_k-(t-k\tau)\hat{y}_{k+1}^*$，$t\in[k\tau,(k+1)\tau]$，那么

$$\dot{y}_N^*(t)\in-A^*(y_N^*(t)+z_N^*(t))。\tag{3.3.11}$$

直接验证可以得到 $\sup|z_N^*(t)|\leqslant2\max\|\hat{v}_k\|+\tau\|\hat{y}_{k+1}^*\|$。因为 A^* 有界闭，所以 $\sup|z_N^*(t)|\to0$，$(N\to\infty)$。

ⅲ. $y_N^*(k\tau)=q+\tau(\hat{y}_1^*+\cdots+\hat{y}_k^*)=q+\tau(\hat{y}_1^*+\cdots+\hat{y}_{k-1}^*)+\tau\hat{y}_k^*=y_N^*((k-1)\tau)+\tau\hat{y}_k^*$，

所以应用式(3.3.10)可以得到

$$\begin{aligned}\| y_N^*(k\tau)\| &\leqslant \| y_N^*((k-1)\tau)\| + \tau \| \hat{y}_k^* \| \\ &\leqslant \| y_N^*((k-1)\tau)\| + \tau \| A\| \| q + \tau(y_1^* + \cdots + y_{k-1}^*) + 2\hat{v}_k \| \\ &\leqslant \| y_N^*((k-1)\tau)\| + \tau \| A\| \| y_N^*((k-1)\tau)\| + 2\tau \| A\| \| \hat{v}_k \| \\ &\leqslant (1+\tau \| A\|) \| y_N^*((k-1)\tau)\| + \frac{2\tau cT \| A\|}{\sqrt{N}},\end{aligned}$$

递推地，

$$\begin{aligned}\| y_N^*(k\tau)\| &\leqslant (1+\tau \| A\|) \| y_N^*((k-1)\tau)\| + \frac{2\tau cT \| A\|}{\sqrt{N}} \\ &\leqslant (1+\tau \| A\|)^2 \| y_N^*((k-2)\tau)\| + ((1+\tau \| A\|)+1)\frac{2\tau cT \| A\|}{\sqrt{N}} \\ &\quad \cdots\cdots \\ &\leqslant (1+\tau \| A\|)^k \| q\| + ((1+\tau \| A\|)^{k-1} + \cdots + (1+\tau \| A\|)+1)\frac{2\tau cT \| A\|}{\sqrt{N}} \\ &\leqslant (1+\tau \| A\|)^N \| q\| + ((1+\tau \| A\|)^N - 1)\frac{2cT}{\sqrt{N}},\end{aligned}$$

由于 $\tau=\frac{T}{N}$，$\left(1+\frac{T\| A\|}{N}\right)^N \to e^{T\| A\|}$，$(N\to\infty)$，因此存在常数 $\bar{c}$，使得对一切 $t\in[0,T]$和一切正整数 N 成立 $\| y_N^*(t)\| \leqslant \bar{c}$ 和 $\| \dot{y}_N^*(t)\| \leqslant \| A\| \bar{c}$，由 Arzela-Ascoli 定理，存在同时使得 $\{y_N^*(t), N=1,2,\cdots\}$和$\{\dot{y}_N^*(t), N=1,2,\cdots\}$一致收敛的子列。因此不妨认为存在绝对连续函数 $y^*(t)$，使得 $y_N^*(t)\to y^*(t)$，$\dot{y}_N^*(t)\to \dot{y}^*(t)$。

在式(3.3.11)中两边同时取极限，得到 $y^*(t)\in S_{[0,T]}(-A^*,q)$。 □

3.3.2 能控性

记 $P=\bigcup\limits_{T>0} P_T$，由于 $P_{T_1}\subset P_{T_2}$ $(T_1\leqslant T_2)$，因此 $P=\lim\limits_{T\to\infty} P_T$；对偶地，定义 $Q=\bigcap\limits_{T>0} Q_T$，由于 $Q_{T_1}\supset Q_{T_2}$ $(T_1\leqslant T_2)$，因此 $Q=\lim\limits_{T\to\infty} Q_T$。应用定理 3.3.1，立即可得 $P^*=-Q$。

定义 3.3.2 P 称为式(3.3.1)的能控集。如果 $P=\mathbb{R}^n$，则称凸系统式(3.3.1)是能控的或者具有**能控性**，也称凸过程 A 是能控的或者具有能控性。 □

定理 3.3.2 如果式(3.3.1)是能控的，那么存在 $T<\infty$，使得 $P_T=\mathbb{R}^n$。

证明：用 $\bar{B}$ 表示$\mathbb{R}^n$中的闭单位球，那么存在 $n+1$ 个向量 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$，使得由它们构成的单纯形 $\mathrm{conx}(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$包含 $\bar{B}$。

由于式(3.3.1)是能控的，对于 $i\in\{1,2,\cdots,n+1\}$和 x_i 存在 $x_i(t)\in S_{[0,T_i]}(A,x_i)$，使得 $x_i(T_i)=0$。令 $T=\max\{T_i, i=1,2,\cdots,n+1\}$，由于 $P_T\supset P_{T_i}$，所以存在 $\tilde{x}_i(t)\in S_{[0,T]}(A,x_i)$，

$\tilde{x}_i(T)=0$ 对一切 $i\in\{1,2,\cdots,n+1\}$ 成立。由于对任意的 $x_0\in\bar{B}$，存在 $\lambda_i\in[0,1]$ 和 $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1$，使得 $x_0=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i$，根据引理 3.3.1，$x(t)=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\tilde{x}_i(t)\in S_{[0,T]}(A,x_0)$，而 $x(T)=0$。

对于任意的 $x_0\in\mathbb{R}^n$，总存在 $\alpha x_0\in\bar{B}$，根据引理 3.3.1，如果 $x(t)\in S_{[0,T]}(A,\alpha x_0)$，那么 $\alpha^{-1}x(t)\in S_{[0,T]}(A,x_0)$。$x(T)=0$，自然 $\alpha^{-1}x(T)=0$。

显然，如果式(3.3.1)是能控的，那么存在 $T<\infty$，使得 $Q_T=\{0\}$。　□

下面给出本节的主要结论。

定理 3.3.3　设 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是严格闭凸过程，那么 A 是能控的充分必要条件是 A^* 没有非平凡的不变子空间，也没有特征向量。

证明：必要性。如果 A^* 存在非平凡的不变子空间 S，那么根据推论 3.1.1 及其后的说明，A^* 限制 S 上是一个线性映射。用 S_1 表示 S 中的最小不变子空间，那么根据线性代数知识(或者参阅本书引理 3.2.2 前的说明)，$\dim S_1$ 等于 1 或 2。

当 $\dim S_1=1$，S_1 是对应实特征值的特征子空间，即存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 和使得对任意 $x\in S_1$，$A^*x=\lambda x$，于是对任意的 $x_0\in S_1$，$e^{-\lambda t}x_0\in S_1\cap S_{[0,\infty)}(-A^*,x_0)$，所以 $S_1\subset Q$，因此进一步有 $Q\neq\{0\}$，即 $P\neq\mathbb{R}^n$。

当 $\dim S_1=2$，存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 和 $x,y\in S_1$，$\|x\|=\|y\|=1$，使得 $A^*x=\alpha x-\beta y$，$A^*y=\beta x+\alpha y$。根据微分方程知识，对于任意的 $ax+by\in\mathrm{span}(x,y)$，$\mathrm{e}^{-\alpha t}(a\cos\beta t-b\sin\beta t)x+\mathrm{e}^{-\alpha t}(b\cos\beta t+a\sin\beta t)y\in S_1\cap S_{[0,\infty)}(-A^*,x_0)$。所以 $S_1\subset Q$，因此进一步有 $Q\neq\{0\}$，即 $P\neq\mathbb{R}^n$。

充分性。只要证明 $Q=\{0\}$，依然用反证法，如果 $Q\neq\{0\}$，下面分两种情形讨论。第一种情形是 Q 不是恰当的，设 S 是包含于 Q 的最大子空间①。任取 $y_0^*\in S$，根据 Q 的定义存在 $y^*(t)\in S_{[0,\infty)}(-A^*,y_0^*)$。另一方面，$-y_0^*\in S$，因此存在 $\bar{y}^*(t)\in S_{[0,\infty)}(-A^*,-y_0^*)$。那么根据引理 3.3.1 和引理 3.3.2，$y^*(t)+\bar{y}^*(t)\in S_{[0,\infty)}(-A^*,y_0^*-y_0^*)=S_{[0,\infty)}(-A^*,0)=\{0\}$。由此得到结论：①$S_{[0,\infty)}(-A^*,y_0^*)$ 只有一个元素；②$y^*(t)=-\bar{y}^*(t)$；③因为对任意的 $t\in[0,\infty)$，$y^*(t)\in Q$，由②进一步可以得到 $y^*(t)\in S$。

因为对任意的 $t,t_0\in[0,\infty)$ 成立 $y^*(t)\in S$，$y^*(t_0)\in S$，而 S 是子空间，所以，

$$\frac{y^*(t)-y^*(t_0)}{t-t_0}\in S$$

令 $t\to t_0$，在有限维空间中，任何一个子空间都是闭的，因此 $\dot{y}^*(t)\in S$，特别 $\dot{y}^*(0)=-A^*(y^*(t))|_{t=0}\in S$，即 $A^*(y_0^*)\in S$，S 是 A^* 不变子空间。这与条件矛盾，因此 Q 是恰当的。

现在只要证明如果 $Q\neq\{0\}$ 则 Q 中必有特征向量。对任意正整数 k，构造一个凸过程如下：$A_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，

$$A_k(x^*)=R_{\left[0,\frac{1}{k}\right]}(-A^*,x^*),$$

① 这等价于 $S=Q\cap(-Q)$。

其中 $R_{[0,\frac{1}{k}]}(-A^*,x^*)$意义由定义 2.4.1 给出。显然 $Q\subset\mathrm{dom}\,A_k$ 和 $A_k(x^*)\cap Q\neq\emptyset$ 对任意的 $x^*\in Q$ 成立。因为 Q 是恰当的，所以根据引理 3.2.1，存在特征值 $\lambda_k\geqslant 0$ 和对应的特征向量 $x_k\in Q$，$\|x_k\|=1$，使得 $\lambda_k x_k^*\in A_k(x_k^*)=R_{[0,\frac{1}{k}]}(-A^*,x_k^*)$。设 $x_k^*(t)\in S_{[0,1]}(-A^*,x_k^*)$，使得 $x_k^*\left(\frac{1}{k}\right)=\lambda_k x_k^*$，即

$$\lambda_k x_k^*=x_k^*\left(\frac{1}{k}\right)=x_k^*+\int_0^{1/k}\dot{x}_k^*(t)\mathrm{d}t。\tag{3.3.12}$$

由于 A 是有界的凸过程，由定理 3.2.3 的(2)和 Gronwall 不等式(引理 2.3.1)，可以得到 $\{x_k^*(t)\}$和$\{\dot{x}_k^*(t)\}$都是有界的，即$\{x_k^*(t)\}$是有界的和等度连续的，所以$\{x_k^*(t)\}$存在一致收敛子列，不妨认为$\{x_k^*(t)\}$一致收敛到 $x^*(t)$。记 $x_k\to x_0$，那么 $\|x_0\|=1$，并由定理 2.4.4，$x^*(t)\in S_{[0,1]}(-A^*,x_0)$。

对任意给定的 $\varepsilon>0$，对充分大的 k 成立

$$-A^*(x_k^*(t))\subset -A^*(x_0^*)+\varepsilon\bar{B},\quad t\in\left[0,\frac{1}{k}\right]$$

其中 $\bar{B}$ 是闭的单位球。所以由式(3.3.12)和引理 2.4.1 得到

$$\lambda_k x_k^*=x_k^*+\int_0^{1/k}\dot{x}_k^*(t)\mathrm{d}t\in x_k^*+\frac{1}{k}(-A^*(x_0^*)+\varepsilon\bar{B}),$$

或者写成

$$k(\lambda_k-1)x_k^*\in -A^*(x_0^*)+\varepsilon\bar{B}。\tag{3.3.13}$$

注意到式(3.3.13)的右面是有界的，而 $\|x_k^*\|=1$，所以集合$\{k(\lambda_k-1)\}$有收敛子列，不妨认为 $k(\lambda_k-1)\to\lambda_0$，所以由式(3.3.13)得到 $\lambda_0 x_0^*\in -A^*(x_0^*)+\varepsilon\bar{B}$，因为 ε 是任意的，因此 $\lambda_0 x_0^*\in -A^*(x_0^*)$，即在 Q 上有 A^* 的特征向量。 □

定理 3.3.2 也说明这样一个事实，如果共轭系统存在一个可以延拓到时间无穷的解，那么 $\mathrm{dom}\,A^*$ 中必定包含一个子空间，或者存在特征向量。

练习

1. 试证明定理 3.3.1 中 $\dot{y}_N^*(t)$的有界性。
2. 设集合值映射 $A(x)$为 $A(x)=Cx+K$，其中 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$为矩阵，$K\subset\mathbb{R}^n$是一个闭凸锥。证明：

(1) $A(x)$是闭凸过程。

(2) $A^*(y^*)=\begin{cases}C^*y^*, & y^*\in K^*,\\ \emptyset, & y^*\notin K^*。\end{cases}$

(3) 凸过程$\dot{x}\in A(x)$能控的充分必要条件是 $C^*\in\mathbb{R}^{n\times n}$在 K^* 中没有特征向量。

(4) 凸过程$\dot{x}\in A(x)$能控的充分必要条件是存在一个 $m\geqslant 1$，使得

$$K+CK+\cdots+C^mK=K-CK+\cdots+(-1)^mC^mK=R^n。$$

(注：如果 $K\subset\mathbb{R}^n$是子空间，它可以表示成 $K=D\mathbb{R}^n$，那么 $K+CK+\cdots+C^mK=\mathbb{R}^n$就是线性控制系统理论中的能控性判据 $\mathrm{rank}[C\ CD\ \cdots\ C^{n-1}D]=n$。)

3.4 凸过程微分包含的稳定性

本节讨论凸过程微分包含系统的稳定性，主要讨论它的弱稳定性，给出凸系统弱稳定的充分必要条件和它的 Lyapunov 函数的构造。由于凸过程具有类线性的优势，因此可以将指数稳定的概念推广到凸系统，读者会发现在凸系统理论中，指数稳定有着重要的作用。

回忆微分包含系统稳定性的定义，考虑微分包含的 Cauchy 问题

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \quad x(0) = x_0。 \tag{3.4.1}$$

$S_{[0,T]}(F,x_0)$表示微分包含(3.4.1)存在于时间区间$[0,T]$上的解组成的集合。当 $T=\infty$时，$S_{[0,\infty)}(F,x_0)$就简单地记成 $S(F,x_0)$。

如果 $0\in F(0)$，则称原点是微分包含(3.4.1)的一个平衡点。以后总假设 $0\in F(0)$，而且系统的稳定性都是针对 0 这个平衡点来讨论的。

称微分包含(3.4.1)是(强)稳定的，如果存在 **K** 类函数 α，使得对任意的 $x(t)\in S(F,x_0)$成立

$$\| x(t) \| \leqslant \alpha(\| x_0 \|)。 \tag{3.4.2}$$

称它是(强)渐近稳定的，如果存在 **KL** 类函数 β，使得对任意的 $x(t)\in S(F,x_0)$成立

$$\| x(t) \| \leqslant \beta(\| x_0 \| ,t)。 \tag{3.4.3}$$

称微分包含(3.4.1)是弱稳定的，如果存在 **K** 类函数 α 和至少一个 $x(t)\in S(F,x_0)$，使得式(3.4.2)成立；称它是弱渐近稳定的，如果存在 **KL** 类函数 β 和至少一个 $x(t)\in S(F,x_0)$，使得式(3.4.3)成立。

称微分包含(3.4.1)是不稳定的，如果它不是弱稳定的。

由上可见，微分包含的稳定性有“强”、“弱”和“不”三种，其中“强”和“弱”的区分在于“全部”和“一个”，而“不”是对“弱”的否定。

3.4.1 稳定性

考虑由严格闭凸过程 A 构成的微分包含(以后简称为凸系统)的 Cauchy 问题：

$$\dot{x}(t) \in A(x(t)), \quad x(0) = x_0。 \tag{3.4.4}$$

凸系统(3.4.4)对偶系统的 Cauchy 问题为

$$\dot{y}^*(t) \in -A^*(y^*(t)), \quad y^*(0) = y_0^*。 \tag{3.4.5}$$

由于 $0\in A(0)$和 $0\in -A^*(0)$，因此原点是系统(3.4.4)和(3.4.5)的平衡点。

根据定理 3.3.2 可知，如果式(3.4.4)是能控的，那它必然是弱渐近稳定的。因此对凸系统来讲，能控性是比弱渐近稳定性更强的概念，它相当于微分方程理论中的有限时间稳定。

继续用 S 表示包含于 $\mathrm{dom}\,A^*\cap(-\mathrm{dom}\,A^*)$ 的最大 A^* 不变子空间，并记 $T=S^{\perp}$，由引理 3.2.2，T 是一个最小的 A 不变子空间。由于 $\mathbb{R}^n=S\oplus T$，因此对每一个 $x\in\mathbb{R}^n$，存在唯一的分解：$x=x_S+x_T$，其中 $x_S\in S$，$x_T\in T$。有时为了方便记 $x^{\mathrm{T}}=(x_S^{\mathrm{T}}\quad x_T^{\mathrm{T}})$①，而将 x_S 和 $(x_S^{\mathrm{T}}\quad 0)^{\mathrm{T}}$，$x_T$ 和 $(0\quad x_T^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 看成一回事。我们已知在有限维空间中所有的范数都等价，因此本节采用 $\|x\|=\max\{\|x_S\|,\|x_T\|\}$，而 $\|x_S\|$ 和 $\|x_T\|$ 通常取成 Euclid 范数。根据定理 3.2.6 及其后的说明，A 在 $\mathbb{R}^n/T$ 上的诱导映射 $\overline{A}$（或者 A^* 在 S 上的限制）是单值线性映射，而限制在 T 上，$A|_T$ 具有类似 Jordan 型的循环结构。引进记号 $L_k(\lambda)=(A-\lambda I)^{-k}(0)$，当 $S=\{0\}$ 且 $\lambda>\lambda_{\mathrm{M}}(A^*)$ 时②，存在 k 使得 $L_k(\lambda)=\mathbb{R}^n$。如果 $S\neq\{0\}$，将这个结论用到 T 上，得到 $T=(A|_T-\lambda I|_T)^{-k}(0)$，对一些 k 和 λ 成立。

定理 3.4.1 如果 $S=\{0\}$，且 $0>\lambda_{\mathrm{M}}(A^*)$，那么凸系统(3.4.4)是弱渐近稳定的。

证明：由于 $0>\lambda_{\mathrm{M}}(A^*)$，因此可以取定 λ，使得 $0>\lambda>\lambda_{\mathrm{M}}(A^*)$，对于这个 λ 成立 $\mathbb{R}^n=(A-\lambda I)^{-k}(0)$。于是，对任意的 $x_0\in\mathbb{R}^n$，存在 $y_k,y_{k-1},\cdots,y_1$，满足

$$x_0=y_k\in(A-\lambda I)^{-1}(y_{k-1}),y_{k-1}\in(A-\lambda I)^{-1}(y_{k-2}),\cdots,y_1\in(A-\lambda I)^{-1}(0)。$$

构造

$$x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}y_1+\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}y_2+\cdots+y_k\right)。\tag{3.4.6}$$

对 $x(t)$ 求导，可得

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}y_1+\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}y_2+\cdots+y_k\right)+\\&\mathrm{e}^{\lambda t}\left(\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}y_1+\frac{t^{k-3}}{(k-3)!}y_2+\cdots+y_{k-1}\right)\\=&\mathrm{e}^{\lambda t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\lambda y_1+\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}(y_1+\lambda y_2)+\cdots+(y_{k-1}+\lambda y_k)\right)\\\in&\mathrm{e}^{\lambda t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A(y_1)+\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}A(y_2)+\cdots+A(y_k)\right)\\\subset&A\left(\mathrm{e}^{\lambda t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}y_1+\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}y_2+\cdots+y_k\right)\right)\\=&A(x(t)),\end{aligned}$$

并且 $x(0)=y_k=x_0$，即 $x(t)\in S_{[0,\infty)}(A,x_0)$，且 $x(t)\to0(t\to\infty)$。 □

在 $S=\{0\}$ 未必成立的时候，定理 3.4.1 可以有下面的推广。

推论 3.4.1 如果 $\lambda<0$，$x_0\in L_k(\lambda)$，那么存在 $x(t)\in S(A,x_0)$，使得 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。 □

推论 3.4.1 的证明与定理 3.4.1 的完全一样，从略。

在微分方程理论中，指数稳定用以表示解的收敛速度，它是表征线性系统特征的重要概念，现在将它推广到微分包含系统。

① 读者需要特别注意上下标的 T 具有不同的含义，上标 T 表示转置，下标 T 为子空间。

② 回忆：$\lambda_{\mathrm{M}}(A^*)$ 为 A^* 的最大特征值，当 A^* 没有特征值时 $\lambda_{\mathrm{M}}(A^*)=-\infty$。

定义 3.4.1　称系统(3.4.1)是(强)**指数稳定**的，如果对任意的 x_0 和任意的 $x(t)\in S(F,x_0)$，存在常数 $\alpha>0$ 和 $\lambda>0$，使得 $\|x(t)\|\leqslant\alpha\|x_0\|e^{-\lambda t}$。

称系统(3.4.1)是**弱指数稳定**的，如果对任意的 x_0，存在常数 $\alpha>0$ 和 $\lambda>0$，使得至少对一个 $x(t)\in S(F,x_0)$ 成立 $\|x(t)\|\leqslant\alpha\|x_0\|e^{-\lambda t}$。　□

由定理 3.4.1 的证明可以看出，当 $S=\{0\}$ 和 $0>\lambda_M(A^*)$ 时，凸系统(3.4.4)是弱渐近稳定的。下面的引理证明它还是弱指数稳定的。

引理 3.4.1　如果凸系统(3.4.4)是弱渐近稳定的，那么它是弱指数稳定的。

证明：用 $\mathbf{B}=\mathrm{bd}B$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的球壳，则由于单位球可以包含在一个单纯形中，因此存在 $y_1,y_2,\cdots,y_{n+1}\in\mathbb{R}^n$，使得 $\mathbf{B}\subset\mathrm{cl\ co}(y_1,y_2,\cdots,y_{n+1})$，那么对于任意的 $y\in\mathbf{B}$ 存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1}\in[0,1]$，$1=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i$，使得 $y=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i y_i$。

由于系统(3.4.4)是弱渐近稳定的，因此对每个 i，$1\leqslant i\leqslant n+1$，存在 $x_i(t)\in S(A,y_i)$，满足 $\lim_{t\to\infty}x_i(t)=0$，于是存在一个公共的 T，使得对一切 i，成立 $\|x_i(T)\|\leqslant ae^{-1}$，其中 $a=\max\{\|x_i(t)\|,t\in[0,\infty),i=1,2,\cdots,n+1\}$。

令 $x(t)=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i(t)$，根据引理 3.3.1，$x(t)\in S(A,y)$，并且①$\lim_{t\to\infty}x(t)=0$；②$\|x(T)\|\leqslant ae^{-1}$(这里 T 表示时间)；③$\|x(t)\|\leqslant a$，$t\in[0.T]$(见图 3.2)。

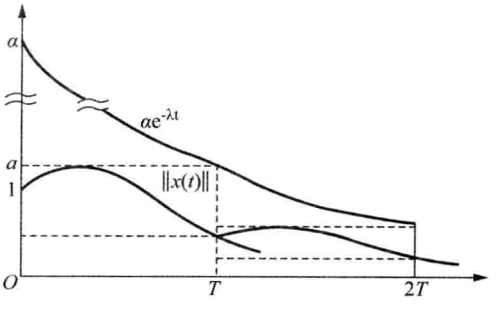


图 3.2　$\|x(t)\|$ 的特征

如果令 $\lambda=T^{-1}$，$\alpha=ae$，那么当 $t\in[0,T]$ 时，$\|x(t)\|\leqslant\alpha e^{-\lambda t}$。定义

$$y(t)=x(mT)x(t-mT),\ t\in[mT,(m+1)T)。$$

那么 $y(t)\in S(A,y)$，且 $\|y(t)\|\leqslant\alpha e^{-\lambda t}$。

对于任意的初始条件 $x_0\in\mathbb{R}^n$，则 $y=x_0\|x_0\|^{-1}\in\mathbf{B}$，于是存在 $y(t)\in S(A,y)$，$\|y(t)\|\leqslant\alpha e^{-\lambda t}$。根据引理 3.3.1，$x(t)=\|x_0\|y(t)\in S(A,x_0)$，$\|x(t)\|\leqslant\alpha\|x_0\|e^{-\lambda t}$。　□

引理 3.4.1 给出了凸过程指数稳定的一致性，得到一个与初始条件无关的 α 和 λ(但与 $x(t)$ 极大值有关)，引理的证明中充分应用了有限维空间和凸过程的特点，这个引理在下面定理的证明中有着重要的作用。

定理 3.4.2　设 A 是一个严格的闭凸过程，那么下列结论等价：

(1) 系统(3.4.4)是弱渐近稳定的。

(2) 对偶过程(3.4.5)是无处稳定的,即对于任意一个非零解 $y^*(t)\in S(-A^*,y_0^*)$,$y^*(t)$是发散的。

(3) A^*在 S 上的限制是一个渐近稳定的线性映射,并且 $\lambda_M(A^*)<0$。

证明:(1)⇨(2)。设系统(3.4.4)是弱渐近稳定的,即对任意的 $x_0\in\mathbb{R}^n$,都有 $x(t)\in S(A,x_0)$,$x(t)$是一个渐近稳定的解。如果存在一个 y_0^*,使得 $y^*(t)\in S(-A^*,y_0^*)$是收敛的,则 $y^*(t)$有界。考虑

$$\begin{aligned}\langle y^*(t),x(t)\rangle &=\langle y_0^*,x_0\rangle+\int_0^t \mathrm{d}\langle y^*(t),x(t)\rangle\\ &=\langle y_0^*,x_0\rangle+\int_0^t(\langle \dot{y}^*(t),x(t)\rangle+\langle x^*(t),\dot{x}(t)\rangle)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

因为 $x(t)\in S(A,x_0)$和 $y^*(t)\in S(-A^*,y_0^*)$,所以由伴随过程的定义,

$$\langle \dot{y}^*(t),x(t)\rangle+\langle y^*(t),\dot{x}(t)\rangle\geqslant 0。$$

因此$\langle y^*(t),x(t)\rangle\geqslant\langle y_0^*,x_0\rangle$。令 $t\to\infty$,因为 $y^*(t)$是有界的,所以 $0\geqslant\langle y_0^*,x_0\rangle$。由于 x_0 是任意的,不等式 $0\geqslant\langle y_0^*,x_0\rangle$蕴含 $y_0^*=0$。

进一步,由于$\dot{y}^*(t)\in -A^*(y^*(t))$,从定理 3.2.3 的(2)得到 $\|\dot{y}^*(t)\|\leqslant\|A\|\|y^*(t)\|$,应用 Gronwall 不等式,

$$\|y^*(t)\|\leqslant \mathrm{e}^{\|A\|t}\|y^*(0)\|=0。$$

这说明有界的解必是零解。因此凸过程微分包含 $\dot{y}^*(t)\in -A^*(y^*(t))$无处是收敛的,即不会存在一个非零的 y_0^* 和 $y^*(t)\in S(-A^*,y_0^*)$,使得 $y^*(t)$有界。

(2)⇨(3)。用反证法。记 $\dim S=\upsilon\neq 0$,那么 A^*在 S 上的限制 $A^*|_S$ 可以写成一个 $\upsilon\times\upsilon$ 矩阵 A_S^*。如果 $A^*|_S$ 不是渐近稳定的,则 A_S^* 有非负实部的特征根。如果这个特征根是非负实数 λ,它对应的特征向量是 $y_0^*\in S\subset\mathbb{R}^n$,那么微分包含的 Cauchy 问题$\dot{y}^*(t)\in -A^*(y^*(t))$,$y^*(0)=y_0^*$ 只有唯一解 $y^*(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}y_0^*$,它是有界的,与(2)矛盾。如这个特征根是复数 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta$③,其中 i 是复数单位,$\alpha\geqslant 0$,它对应的特征向量是 $u_0^*\pm\mathrm{i}v_0^*$,$u_0^*,v_0^*\in S\subset\mathbb{R}^n$,根据微分方程理论,存在

$$y^*(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}(u_0^*\cos\beta t-v_0^*\sin\beta t)\in S_{[0,\infty)}(-A^*,u_0)$$

和

$$y^*(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}(v_0\cos\beta t+u_0\sin\beta t)\in S_{[0,\infty)}(-A^*,v_0),$$

它们也都是有界的,也与(2)矛盾。

如果 A^*存在非负特征值 $\lambda\geqslant 0$,它对应的特征向量是 y_0^*,那么 $y(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}y_0^*\in S_{[0,\infty)}(-A^*,y_0^*)$,而 $\mathrm{e}^{-\lambda t}y_0^*$ 是有界的,也导致与(2)矛盾。

(3)⇨(1)。这部分的证明是构造性的,我们分成两步来完成。

③ 暂且先在复数域上考虑,下文会恢复在实数域上分析。

ⅰ. 构造 $x(t)\in S_{[0,\infty)}(A,x_0)$。

根据推论 3.4.1,由于 $\lambda_M(A^*)<0$,对任意的 $x_0\in T$,存在 $x(t)\in S_{[0,\infty)}(A,x_0)$,$\|x(t)\|\leqslant\alpha\|x_0\|e^{-\lambda t}$,其中 α 和 λ 是正数。取定正数 τ 使得 $\alpha e^{-\lambda\tau}<1$。

对任意的 $x_0\in\mathbb{R}^n$,作 x_0 的正交分解 $x_0=x_{0S}+x_{0T}$,其中 $x_{0S}\in S,x_{0T}\in T$。对 x_{0T} 应用上面的说明,得到 $x_{0T}(t)\in S_{[0,\infty)}(A,x_{0T})$,使得 $\|x_{0T}(t)\|\leqslant\alpha\|x_{0T}\|e^{-\lambda t}$。固定时间区间为 $[0,\tau]$,自然有 $x_{0T}(t)\in S_{[0,\tau]}(A,x_{0T})$。

将定理 2.3.3 中的 M 取成 $\{x_{0T}(t)\}$,$r_0(x)\equiv x_0$,那么定理 2.3.3 说明存在 $x_0(t)\in S_{[0,\tau]}(A,x_0)$,它满足 $\|x_0(t)-x_{0T}(t)\|\leqslant\|x_0-x_{0T}\|e^{\|A\|t}$,这是因为 A 是 Lipschitz 的,而且它的 Lipschitz 常数可以是 $\|A\|$。

取 $x_1=x_0(\tau)$,将 x_1 代替上面的 x_0,重复上述过程可以得到 $x_{1T}(t)\in S_{[0,\tau]}(A,x_{1T})$ 和 $x_1(t)\in S_{[0,\tau]}(A,x_1)$。再取 $x_2=x_1(\tau)$,…。一直下去,可以得到两个序列 $x_{kT}(t)$ 和 $x_k(t)$,$k=1,2,\cdots$,其计算顺序如图 3.3 所示:

$\mathbb{R}^n$	x_0	$x_0(t)$	$\rightarrow\!\!\rightarrow x_0(\tau)=x_1$	$x_1(t)\rightarrow\!\!\rightarrow x_1(\tau)=x_2$	
	↓投影	↑定理 2.3.3	↓投影	↑定理 2.3.3	↓投影
T	$x_{0T}\rightarrow\!\!\rightarrow x_{0T}(t)$		$x_{1T}\rightarrow\!\!\rightarrow x_{1T}(t)$		$x_{2T}\rightarrow\!\!\rightarrow x_{2T}(t)$

图 3.3　$x_i(t)$ 和 $x_{iT}(t)$ 的计算顺序

它们满足:

$$\begin{aligned}&x_k(\tau)=x_{k+1}=x_{k+1}(0);\quad x_k=x_{kS}+x_{kT};\\&x_{kT}(t)\in S_{[0,\tau]}(A,x_{kT})\quad\text{和}\quad x_k(t)\in S_{[0,\tau]}(A,x_k);\\&\|x_{kT}(t)-x_k(t)\|\leqslant e^{\|A\|t}\|x_{kT}(0)-x_k(0)\|\\&\qquad=e^{\|A\|t}\|x_{kT}-x_k\|=e^{\|A\|t}\|x_{kS}\|。\end{aligned}\tag{3.4.7}$$

定义 $x(t)=x_k(t-k\tau)$,$t\in[k\tau,(k+1)\tau)$。可以直接验证 $x(t)\in S_{[0,\infty)}(A,x_0)$。

ⅱ. 证明 $x(t)\rightarrow0(t\rightarrow\infty)$。

用 P_T 表示 $\mathbb{R}^n$ 到 T 的投影④,P_S 表示 $\mathbb{R}^n$ 到 S 的投影,由于 $\mathbb{R}^n/T$ 同构于 S,因此 P_S 也可以看成 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n/T$ 的投影。记 $P_Sx(t)=x_S(t)$ 和 $P_Tx(t)=x_T(t)$,根据本节中对范数的定义,$\|x(t)\|=\max\{\|x_S(t)\|,\|x_T(t)\|\}$。因而只要 $x_S(t)\rightarrow0(t\rightarrow\infty)$ 和 $x_T(t)\rightarrow0(t\rightarrow\infty)$,就有 $x(t)\rightarrow0(t\rightarrow\infty)$。

因为 T 是 A 不变的,用 $\overline{A}$ 表示 A 在 $\mathbb{R}^n/T$ 上的诱导映射,那么 $P_SA=\overline{A}P_S$。因此 $x_S(t)$ 满足 $\dot{x}_S(t)=P_S\dot{x}(t)=P_SA(x(t))=\overline{A}P_S(x(t))=\overline{A}x_S(t)$。根据引理 3.2.5,$\overline{A}$ 是单值的线性算子,而且它的特征值就是 $A^*|_S$ 的特征值,所以根据定理的条件,$\overline{A}$ 是渐近稳定的,也就是存在正数 β 和 μ 使得

$$\|x_S(t)\|\leqslant\beta\|x_S(0)\|e^{-\mu t},\tag{3.4.8}$$

④ 注意此处的 P_T 不是上一小节定义的能控锥。

对一切 $x_S(0)\in S$ 成立。

剩下只要证明 $x_T(t)\to 0(t\to\infty)$。我们有 $x_T((k-1)\tau)=x_{kT}$，先分析 x_{kT}：

$$\begin{aligned}\| x_{kT}\| &\leqslant \| x_{kT}-x_{(k-1)T}(\tau)\| + \| x_{(k-1)T}(\tau)\| \\ &\leqslant \| x_k - x_{(k-1)T}(\tau)\| + \| x_{(k-1)T}(\tau)\| \\ &\leqslant \| x_{(k-1)S}\| \mathrm{e}^{\|A\|\tau}+\alpha \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\| x_{(k-1)T}\|,\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

其中应用了 $\| x_{kT}-x_{(k-1)T}(\tau)\|\leqslant \| x_k-x_{(k-1)T}(\tau)\|$，而根据 x_k 的定义成立 $\| x_k-x_{(k-1)T}(\tau)\|=\| x_{k-1}(\tau)-x_{(k-1)T}(\tau)\|$，再应用式(3.4.7)得到最后不等式的第一项；而第二项是因为 $x_{(k-1)T}(t)$ 是个弱稳定解。为了方便记 $f=\alpha \mathrm{e}^{-\lambda\tau}$，则 $f<1$。应用式(3.4.8)，并记 $g=\mathrm{e}^{(\|A\|+\mu)\tau}$，由式(3.4.9)得到

$$\| x_{kT}\| \leqslant \| x_{0S}\| \mathrm{e}^{\|A\|\tau-\mu(k-1)\tau}+f\| x_{(k-1)T}\| = g\| x_{0S}\| \mathrm{e}^{-\mu k\tau}+f\| x_{(k-1)T}\|。$$

于是递归地成立

$$\begin{aligned}\| x_{kT}\| &\leqslant g\| x_{0S}\| \mathrm{e}^{-\mu k\tau}+f\| x_{(k-1)T}\| \\ &\leqslant g\| x_{0S}\| \mathrm{e}^{-\mu k\tau}+f(g\| x_{0S}\| \mathrm{e}^{-\mu(k-1)\tau}+f\| x_{(k-2)T}\|) \\ &\leqslant g\| x_{0S}\| \mathrm{e}^{-\mu k\tau}+fg\| x_{0S}\| \mathrm{e}^{-\mu(k-1)\tau}+f^2(g\| x_{0S}\| \mathrm{e}^{-\mu(k-2)\tau}+f\| x_{(k-3)T}\|) \\ &\quad\cdots\cdots \\ &\leqslant g\| x_{0S}\| \mathrm{e}^{-\mu k\tau}+fg\| x_{0S}\| \mathrm{e}^{-\mu(k-1)\tau}\cdots+f^{k-1}g\| x_{0S}\| \mathrm{e}^{-\mu\tau}+f^k\| x_{0T}\| \\ &= g\| x_{0S}\| \frac{f^k-(\mathrm{e}^{-\mu\tau})^k}{f-\mathrm{e}^{-\mu\tau}}+f^k(\| x_{0T}\|-g\| x_{0S}\|),\end{aligned}$$

因为 $f<1$，$\mathrm{e}^{-\mu\tau}<1$，所以 $x_{kT}\to 0(k\to\infty)$。

当 $t\in[k\tau,(k+1)\tau)$ 时，成立

$$\begin{aligned}\| x_T(t)\| &\leqslant \| x_T(t)-x_{kT}(t-k\tau)\| + \| x_{kT}(t-k\tau)\| \\ &\leqslant \| x(t)-x_{kT}(t-k\tau)\| + \| x_{kT}(t-k\tau)\| \\ &\leqslant \| x_{kS}(t-k\tau)\| + \| x_{kT}(t-k\tau)\| \\ &\leqslant \| x_{kS}\| \mathrm{e}^{\|A\|\tau}+f\| x_{kT}\|,\end{aligned}$$

即 $\bar{x}_T(t)\to 0(k\to\infty)$。 □

3.4.2 Lyapunov 函数的构造

对于一个随意给定的微分方程，几乎不能指望求出它的解析解，因此造就了微分方程定性理论。在定性理论中，Lyapunov 直接方法是判别稳定性的重要方法。求解微分包含自然更为困难，所以 Lyapunov 方法显得更有意义。上一章的定理 2.5.5 给出弱稳定的 Lyapunov 类判据，定理说如果存在正定函数 $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，半负定函数 $W:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 和 $\upsilon\in\mathbb{R}^n$ 使得 $D^-V(x)(\upsilon)\leqslant W(x)$，那么微分包含是弱稳定的。这个 V 就称为 Lyapunov 函数。可惜目前还没有一个有效的构造 Lyapunov 函数的方法，但是与线性系统一样，凸过程系统存在 Lapunov

函数。

考虑凸过程微分包含(3.4.4),如果存在正定凸函数 $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 和 $\upsilon\in A(x)$,满足 $0<\delta<1$ 的正数 δ,使得不等式

$$V(x+\tau\upsilon)\leqslant\delta V(x) \tag{3.4.10}$$

对某个正数 τ 成立,则 $V(x)$ 是式(3.4.4)的 Lyapunov 函数。这是因为根据定理 1.3.4 中的式(1.3.4),

$$\frac{V(x+\tau\upsilon)-V(x)}{\tau}$$

关于 τ 是单调递减的,因此

$$DV(x)(\upsilon)\leqslant\frac{V(x+\tau\upsilon)-V(x)}{\tau}\leqslant\frac{\delta-1}{\tau}V(x)。 \tag{3.4.11}$$

令 $\theta=\dfrac{1-\delta}{\tau}$,则 $\theta>0$ 和 $DV(x)(\upsilon)\leqslant-\theta V(x)$。在式(3.4.10)中,要求 $\upsilon\in A(x)$ 是保证在计算式(3.4.11)时,$x(t)$ 是沿着式(3.4.4)轨线方向变化的。我们已知渐近稳定的单值线性系统必定存在 Lyapunov 函数,下面我们证明对于一个渐近稳定的凸系统(3.4.4)也必定存在一个正定凸函数 $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足式(3.4.10)。

定理 3.4.3　如果 $A^*|_S$ 是渐近稳定的,并且 $\lambda_M(A^*)<0$,那么存在正定的凸函数 $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,$\delta\in(0,1)$ 和 $\upsilon\in A(x)$,成立 $V(x+\tau\upsilon)\leqslant\delta V(x)$。

证明:证明分成下面三步完成。

(1) 构造 V 函数。

用 $\overline{A}$ 表示 A 在 $\mathbb{R}^n/T$ 上的诱导映射,那么,根据定理 3.4.3 的条件,$\overline{A}$ 是渐近稳定的,由线性系统的结论,Lyapunov 方程 $A^{\mathrm{T}}P+PA=-I$ 存在唯一的正定解 P,而且 $V_S(x_S)=x_S^{\mathrm{T}}Px_S$ 是微分方程 $\dot{x}_S=\overline{A}x_S$ 的 Lyapunov 函数。记

$$M_S=\{x_S;x_S\in S,V_S(x_S)\leqslant 1\}。$$

现在考虑子空间 T,记 $\dim T=m$。用 B 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的开单位球,则 $B_T=B\cap T$ 便是 T 上的开单位球,于是存在 T 上的单纯型 $\mathrm{co}\{y_1,y_2,\cdots,y_{m+1}\}$,使得 $B_T\subset\mathrm{co}\{y_1,y_2,\cdots,y_{m+1}\}\subset T$。又因为 $\lambda_M(A^*)<0$,因此可以取定实数 λ,使得 $\lambda_M(A^*)<\lambda<0$。根据定理 3.2.5,存在正整数 k_0,使得 $T=(A-\lambda I)^{-k_0}(0)$。记 $L_k=(A-\lambda I)^{-k}(0)$,$1\leqslant k\leqslant k_0$,则对每个 y_i,$1\leqslant i\leqslant m+1$,存在 k_i,使得 $y_i\in L_{k_i}$,$y_i\notin L_{k_i-1}$,根据定理 3.2.5,存在非零向量 $y_i=y_i^{k_i},y_i^{k_i-1},\cdots,y_i^1\in T$,满足

$$\begin{aligned}&\lambda y_i^1\in A(y_i^1),\\&y_i^1+\lambda y_i^2\in A(y_i^2),\\&\cdots\cdots\\&y_i^{k_i-1}+\lambda y_i^{k_i}\in A(y_i^{k_i})。\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

由此得到集合 $\{y_i^j;j=1,2,\cdots,k_i,i=1,2,\cdots,m+1\}$。固定一个 $\alpha>\max\{1,|\lambda|\}$,定义

$$z_i^j = \left(\frac{\alpha}{|\lambda|}\right)^{k_i-j} y_i^j。 \tag{3.4.13}$$

定义

$$M_T = \text{cl co}\{z_i^j; j = 1,2,\cdots,k_i, i = 1,2,\cdots,m+1\},$$

那么 $M_T \supset \text{co}(y_1, y_2, \cdots, y_{m+1}) \supset B_T$。确定正数 ω，再定义集合

$$M_\omega = M_T \oplus \omega M_S \subset T \oplus S = \mathbb{R}^n。$$

容易证明 M_ω 总是凸紧集。定义 $V(x)$ 是 M_ω 上的 Minkovski 函数⑤。

(2) M_S 和 M_T 的性质。

首先证明对任意的 $x_S \in \text{bd}M_S \subset S$，存在与 x_S 无关的正数 τ_S 和 δ_S，其中 $0 < \delta_S < 1$，使得 $x_S + \tau_S \overline{A} x_S \in \delta_S M_S$。

考虑函数

$$\begin{aligned} V_S(x_S + \tau\overline{A}x_S) &= (x_S + \tau\overline{A}x_S)^{\mathrm{T}} P(x_S + \tau\overline{A}x_S) \\ &= x_S^{\mathrm{T}} P x_S - \tau x_S^{\mathrm{T}} x_S + \tau^2 x_S^{\mathrm{T}} \overline{A}^{\mathrm{T}} P \overline{A} x_S \\ &= 1 - \tau x_S^{\mathrm{T}} x_S + \tau^2 x_S^{\mathrm{T}} \overline{A}^{\mathrm{T}} P \overline{A} x_S, \end{aligned}$$

注意到 $\overline{A}$ 是渐近稳定的，所以 $\overline{A}^{\mathrm{T}} P \overline{A}$ 依然是正定矩阵。当 $\tau = \dfrac{x_S^{\mathrm{T}} x_S}{x_S^{\mathrm{T}} \overline{A}^{\mathrm{T}} P \overline{A} x_S}$ 时，$V(x_S + \tau\overline{A}x_S) = 1$，而当 $0 < \tau < \dfrac{x_S^{\mathrm{T}} x_S}{x_S^{\mathrm{T}} \overline{A}^{\mathrm{T}} P \overline{A} x_S}$ 时，$V(x_S + \tau\overline{A}x_S) < 1$。所以可取 $\tau_S = \min\limits_{x_S \in \text{bd}M_S} \dfrac{x_S^{\mathrm{T}} x_S}{2 x_S^{\mathrm{T}} \overline{A}^{\mathrm{T}} P \overline{A} x_S}$ 和 $\delta_S = \max\limits_{x_S \in \text{dbM}_S} V(x_S + \tau_S \overline{A} x_S) < 1$。

如果 $x_S \in \text{int}M_S$，那么存在 $a > 1$，使得 $a x_S \in \text{bd}M_S$，那么根据上述证明 $a x_S + \tau_S \overline{A} a x_S \in \delta_S M_S$，因而 $x_S + \tau_S \overline{A} x_S \in a^{-1}\delta_S M_S \subset \delta_S M_S$。由此 $x_S + \tau_S \overline{A} x_S \in \delta_S M_S$ 对一切 $x_S \in M_S$ 成立。

其次证明对 $x_T \in M_T \subset T$，存在 $\upsilon \in A((0 x_T^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}})$，和正数 τ_T 和 δ_T，其中 $0 < \delta_T < 1$，使得 $x_T + \tau_T \upsilon \in \delta_T M_T$。

对 $i = 1,2,\cdots,m+1$，令

$$\upsilon_i^1 = \lambda z_i^1, \quad \upsilon_i^j = \frac{|\lambda|}{\alpha} z_i^{j-1} + \lambda z_i^j, \quad j = 2,3,\cdots k_i,$$

那么由式(3.4.12)和式(3.4.13)，可以证得 $\upsilon_i^j \in A(z_i^j)$；并且成立

$$|\lambda|^{-1}\upsilon_i^1 + z_i^1 = 0 \in \text{int}M_T, \quad |\lambda|^{-1}\upsilon_i^j + z_i^j = \frac{1}{\alpha} z_i^{j-1} \in \text{int}M_T, \quad j = 2,3,\cdots k_i。$$

于是对任意的 $x_T \in M_T$，存在 $\lambda_i^j \in [0,1]$，满足 $\sum\limits_{i,j} \lambda_i^j = 1$，使得 $x_T = \sum\limits_{i,j} \lambda_i^j z_i^j$，对应的 $\upsilon_T = \sum\limits_{i,j} \lambda_i^j \upsilon_i^j$，那么成立 $\upsilon_T \in A(x_T)$ 和

$$x_T + |\lambda|^{-1}\upsilon_T = \alpha^{-1} \sum_{i,j} \lambda_i^j z_i^{j-1} \in \alpha^{-1} M_T,$$

⑤ Minkovski 函数在 1.3 节中定义。设 A 是凸集，并且原点为 A 的内点，关于 A 的 Minkovski 函数定义为 $\mu(x,A) = \inf\{a > 0, a^{-1}x \in A\}$。在该节证明了 $\mu(x,A)$ 是正齐次的和凸的。

其中 $z_i^{-1}=0$。取 $\tau_T=|\lambda|^{-1}$，$\delta_T=\alpha^{-1}$，结论获证。

(3) 存在 ω 使得 $V(x)$ 满足式(3.4.10)。

由于 Minkovski 函数成立正齐次性，因此我们只要对 M_ω 边界上的点在验证式(3.4.10)成立。设 $(x_T^{\mathrm{T}}\quad x_S^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in \mathrm{bd}M_\omega\subset M_T\oplus\omega M_S$，其中 $x_S\in\omega M_S$，$x_T\in M_T$。

在 ω 给定后，对 ωM_S 重复(2)中对 M_S 的讨论，同样可以证明存在与 x_S 无关的正数 τ_S 和 δ_S，其中 $0<\delta_S<1$，使得对 $x_S\in\omega M_S$ 成立 $x_S+\tau_S\overline{A}x_S\in\delta_S\omega M_S$[⑥]。

取 $\tau=\min(\tau_S,\tau_T)$，$\delta=\max(\delta_S,\delta_T)$，那么对 $x_S\in\omega M_S$ 和 $x_T\in M_T$ 同时成立

$$x_S+\tau\overline{A}x_S\in\delta\omega M_S,\quad x_T+\tau\upsilon_T\in\delta M_T。$$

注意到 $\upsilon_T\in A([0\quad x_T^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}})$。选取 $\upsilon\in A(x)=A(x_S+x_T)$，满足 $\|\upsilon-\upsilon_T\|\leqslant\|A\|\|x_S\|\leqslant\|A\|\omega b$。选取一个 $\omega\in(0,\omega_0)$，其中 $\omega_0=(1-\delta)/4\tau\|A\|b$，$b=\max\{\|x_S\|,x_S\in M_S\}$。那么

$$\begin{aligned}(0x_T^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}+\tau P_T\upsilon&=(0\quad x_T^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}+\tau\upsilon_T+\tau P_T\upsilon-\tau\upsilon_T\\&\in\delta M_T+\tau\|P_T\upsilon-\upsilon_T\|B_T\\&\subset\delta M_T+\tau\|\upsilon-\upsilon_T\|B_T\\&\subset\delta M_T+\frac{1-\delta}{4}B_T\\&\subset\delta M_T+\frac{1-\delta}{4}M_T\\&=\frac{1+3\delta}{4}M_T\\&\subset\frac{1+\delta}{2}M_T。\end{aligned}$$

又有 $P_S\upsilon\in P_SA(x_S\oplus x_T)=\overline{A}P_S(x_S\oplus x_T)=\overline{A}x_S$，因此 $x_S+\tau\overline{A}x_S\in\delta\omega M_S$ 就是 $x_S+\tau P_S\upsilon\in\delta\omega M_S\subset\frac{1+\delta}{2}\omega M_S$。

总之得到

$$\begin{bmatrix}x_S\\x_T\end{bmatrix}+\tau\upsilon\in\frac{1+\delta}{2}\begin{bmatrix}\omega M_S\\M_T\end{bmatrix},$$

其中 $\upsilon\in A(x)$。这说明式(3.4.9)成立，不过其中的 δ 要用 $\frac{1+\delta}{2}$ 代替，而 $\frac{1+\delta}{2}<1$。 □

定理 3.4.3 是微分包含系统的 Lyapunov 逆定理。由定理 3.4.2 的(3)和定理 3.4.3 得到：凸系统(3.4.4)是弱渐近稳定的充分必要条件是存在正定函数 $V(x)$ 和 $W(x)$，使得 $D^-V(x)(\upsilon)\leqslant-W(x)$ 对某个 $\upsilon\in\mathbb{R}^n$ 成立。

练习

1. 证明对于凸系统(3.4.4)来说，$\upsilon\in A(x)$ 保证了由式(3.4.10)导出 $D^-V(x)(\upsilon)\leqslant-\theta V(x)$，其

⑥ 这里的 τ_S，δ_S 可能与(2)中获得的有不同的数值，本节以后采用的 τ_S，δ_S 是这里获得的数值。

中 $\theta>0$。

2. 求凸过程 $A(x)$为 $A(x)=Cx+K$ 是弱渐近稳定的条件，其中 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$为矩阵，$K\subset\mathbb{R}^n$是一个闭凸锥。

3. 如果凸过程 $A(x)=Cx+K$ 中，$C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}$，$K$ 是第一象限(从而是凸锥)，判别：

(1) 是否弱渐近稳定，若是，求出一个渐近稳定的解。

(2) 判别是否渐近稳定，试求 K 满足什么条件时它是渐近稳定的。

第4章

线性多胞体控制系统

本章讨论一类微分包含系统——线性多胞体系统及其控制问题，这种系统可以看成是线性控制系统在集合值映射中的另一种推广。在微分包含控制系统中，线性多胞体系统相对来说比较简单，而且，至今为止被比较深入研究的微分包含控制系统仅限于线性多胞体控制系统和下一章要讨论的 Luré 型微分包含系统。

4.1 多胞体系统

为了以后的叙述，我们在本节的开头用一小节介绍线性系统和矩阵不等式的一些成果，这

些知识对于后面的叙述是必须的，尤其是矩阵不等式，近年来已经成为控制系统设计的重要工具。本节然后给出多胞体系统的定义。

4.1.1 线性控制系统和矩阵不等式

1) 线性控制系统

典型**线性控制系统**的描述如下：

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

其中对每个给定的 $t\in[0,\infty)$，$x(t)\in\mathbb{R}^n$，它称为系统的状态，$u(t)\in U\subset\mathbb{R}^m$ 称为系统的输入或者控制，这里的集合 U 就称为允许控制集，$y(t)\in\mathbb{R}^r$ 称为系统的输出。在线性系统(4.1.1)中第一个方程称为状态方程，它是一个微分方程，第二个方程称为输出方程，它是代数方程。状态 $x(t)$ 维数 n 就称为这个系统的阶。在线性系统(4.1.1)中的系数 A,B,C 是维数合适的矩阵，当它们都不含时间变量 t 的时候，就称线性系统(4.1.1)是时不变的；否则称为时变的。由于本书主要讨论的微分包含都是时不变，因此这里只介绍时不变线性控制系统。这时式(4.1.1)中的 A 是一个 $n\times n$ 的矩阵，称为系统的动态矩阵。A 的特征值称为系统的极点。系统稳定性完全由 A 的特征值所决定。$(n+r)\times(n+m)$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

称为线性系统(4.1.1)的**系统矩阵**，它和式(4.1.1)一样可以是系统的一个完全的数学描述。在这个意义下，我们也经常用 (A,B) 来代替式(4.1.1)中的第一个方程，用 (C,A,B) 来表示线性系统(4.1.1)。

对式(4.1.1)作 Laplace 变换，然后消去状态变量，得到

$$Y(s) = C(sI-A)^{-1}BU(s),$$

$C(sI-A)^{-1}B$ 称为是线性系统(4.1.1)的传递函数矩阵，它的分母次数大于分子次数，因此称为真有理分式矩阵。

系统(4.1.1)常用图 4.1 描述的框图来表示。

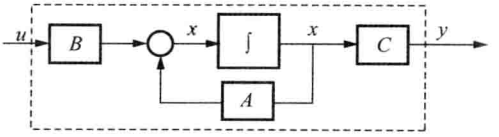


图 4.1 线性控制系统

在图 4.1 中，虚线框内称为系统的内部，框外称为系统的外部，因此 $x(t)$ 称为系统的内部变量，$u(t)$ 和 $y(t)$ 称为外部变量。一般认为内部的状态变量 x 是不能直接量测的，因此可以获得的信号只有输入 u 和输出 y。在这个意义上，传递函数矩阵称为是系统(4.1.1)的外部

描述。

$u=F(x)$称为系统(4.1.1)的状态反馈；相应地，$u=K(y)$称为输出反馈。当 $F(x)$和 $K(y)$是线性映射时，就称这些反馈是线性的，否则就是非线性的。

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= M\xi(t)+Ny(t),\\ u(t) &= H\xi(t)+Ky(t),\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

称为是线性系统(4.1.1)的一个**线性动态输出反馈**，其中的 $\xi(t)\in\mathbb{R}^p$称为动态补偿器的状态，p 称为动态补偿器的阶。状态反馈、输出反馈和动态输出反馈是控制系统设计中的主要控制手段，常见的控制目标有极点配置、镇定、跟踪、最优控制等。

由于认为图 4.1 中虚线框内部分是一个黑箱，就是说状态 $x(t)$是不可直接获得的，因而观测是控制系统设计的又一个重要内容。Σ_O 称为是线性系统(4.1.1)的一个渐近观测器，如果 Σ_O 的输出$\hat{x}$满足$\lim\limits_{t\to\infty}(\hat{x}(t)-x(t))=0$。目前最常见的观测器称为 **Lunberger 观测器**，它的构造如下：

$$\dot{\hat{x}} = (A-KC)\hat{x}+Ky+Bu。 \tag{4.1.3}$$

当(A,C)是能观的时候，总可以找到 K 使得$\lim\limits_{t\to\infty}(\hat{x}(t)-x(t))=0$ 成立。

观测器(4.1.3)称为全维观测器，因为它的维数和系统(4.1.1)一样。事实上，由于输出 y 直接包含了部分 x 的信息，我们只要设计一个 $n-r$ 维观测器就可以了，这样的观测器称为**降维观测器**。

2) 矩阵不等式

矩阵不等式是当前控制系统设计的一个有效工具，特别是目前很多有效的计算机辅助设计软件都有一个矩阵不等式的工具箱，因此求解线性矩阵不等式变得非常方便，这也极大地推广了矩阵不等式的应用。

设 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$是一个对称矩阵，$P>0$ 是指 P 是一个正定矩阵，$P\geqslant 0$ 是指 P 是一个半正定矩阵；类似地可以定义 $P<0$ 和 $P\leqslant 0$。不等式的应用可以推广到两个矩阵。如果 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$是两个对称矩阵，称 $A>B$，是指 $A-B>0$。类似地可以定义 $A\geqslant B$，$A<B$ 和 $A\leqslant B$。

下面的引理称为 **Schur 补定理**，在以后的讨论中有着重要的作用。

引理 4.1.1　设有对称矩阵

$$A=\begin{bmatrix}P & R\\ R^{\mathrm{T}} & Q\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

其中 $P\in\mathbb{R}^{m\times m}$，$Q\in\mathbb{R}^{r\times r}$，$m+r=n$，那么下列三条等价：

(1) $A<0$。

(2) $P<0$，$Q-R^{\mathrm{T}}P^{-1}R<0$。

(3) $Q<0$，$P-RQ^{-1}R^{\mathrm{T}}<0$。　□

引理 4.1.1 的证明在一般的矩阵教材中都可以找到，这里略去。引理 4.1.1 关于正定有相应的结论，读者不妨自行写出。为了方便叙述，我们称引理 4.1.1 中的结论(2)是关于 P 应用了 Schur 引理，称结论(3)是关于 Q 应用了 Schur 引理。引理 4.1.1 有它的半负定的形式。

引理 4.1.2 设有对称矩阵

$$A=\begin{bmatrix}P & R\\ R^{\mathrm{T}} & Q\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

其中 $P\in\mathbb{R}^{m\times m}$,$Q\in\mathbb{R}^{r\times r}$,$m+r=n$,那么下列三条等价:

(1) $A\leqslant 0$。

(2) $P\leqslant 0$,$Q-R^{\mathrm{T}}P^{-1}R\leqslant 0$,$R^{\mathrm{T}}(I-PP^{-1})=0$。

(3) $Q\leqslant 0$,$P-RQ^{-1}R^{\mathrm{T}}\leqslant 0$,$R(I-QQ^{-1})=0$。

其中的 P^{-1} 和 Q^{-1} 分别是 P 和 Q 的 Moore-Penrose 逆①,I 是维数适当的单位矩阵。 □

如果 P 或 Q 是可逆矩阵的时候,那么上述条件(2)或(3)中第三个等式必定成立。

这两个引理的意义首先在于它将验证一个 n 阶矩阵的负定问题转化成两个低维的矩阵的负定问题,从而降低验算的复杂度,这种应用可以称为是正向应用。其次,它将一个二次的矩阵不等式转化成一个维数较高的线性矩阵不等式,这种应用称为是 Schur 引理的反向应用。在控制系统设计中反向应用的机会会多于正向应用。在内点法提出以后,现在已经有很多程序可以用来求解这些线性矩阵不等式,因此求取数值解变得非常容易。

例如 $X\in\mathbb{R}^{p\times q}$,要求 $X^{\mathrm{T}}X<I$ 就是要求 $\begin{bmatrix}-I & X\\ X^{\mathrm{T}} & -I\end{bmatrix}<0$。后者可以用线性矩阵不等式来解。

又如矩阵 A 是 Hurwitz 矩阵的充分必要条件是它的 Lyapunov 方程 $PA+A^{\mathrm{T}}P=-Q$ 对任意正定的矩阵 Q,存在正定解 P。这等价于求解线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}-P & 0\\ 0 & PA+A^{\mathrm{T}}P\end{bmatrix}<0。$$

再如 Riccati 不等式 $KA+A^{\mathrm{T}}K+KBR^{-1}B^{\mathrm{T}}K+Q<0$,它关于未知矩阵 K 是二次的,将它转化成

$$\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}K+KA+Q & KB\\ B^{\mathrm{T}}K & -R\end{bmatrix}<0。$$

这是一个关于 K 的线性不等式,用软件可以方便地求出。

下面的两个不等式是基本的,它们都可以用 Schwarz 不等式来证明,罗列于下,以资引用,其证明略去。

设 U 和 V 是两个维数适当的实矩阵,那么对任意正实数 α,总成立

$$U^{\mathrm{T}}V+V^{\mathrm{T}}U\leqslant\alpha U^{\mathrm{T}}U+\alpha^{-1}V^{\mathrm{T}}V。\tag{4.1.4}$$

设 x 和 y 是两个 n 维实向量,Q 是任意一个 $n\times n$ 的正定矩阵,那么总成立

$$2x^{\mathrm{T}}y\leqslant x^{\mathrm{T}}Qx+y^{\mathrm{T}}Q^{-1}y。\tag{4.1.5}$$

以后会提到 Hurwitz 矩阵,回忆它的定义:一个矩阵称为是 Hurwitz 矩阵,如果它是方阵,且

① 回忆 Moore-Penrose 逆的定义,设 A 是一个 $n\times n$ 的对称矩阵,A 的 Moore-Penrose 逆 G 是一个 $n\times n$ 矩阵,并满足,$AGA=G$,$GAG=A$,$(AG)^{\mathrm{T}}=AG$,$(GA)^{\mathrm{T}}=GA$。

它的特征值都有负实部。线性系统$\dot{x}=Ax$是渐近稳定的充分必要条件是A是 Hurwitz 矩阵。

4.1.2　线性多胞体系统

1) 线性多胞体系统的描述

设$A_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$,$i=1,2,\cdots,N$,是$N$个实矩阵,

$$\mathrm{co}(A_i,i=1,2,\cdots,N)=\left\{A=\sum_{i=1}^{N}\gamma_iA_i;(\gamma_1\quad\gamma_2\quad\cdots\quad\gamma_N)^{\mathrm{T}}\in\Gamma\right\}$$

是A_i组成的凸包,其中

$$\Gamma=\left\{\gamma;\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_N);0\leqslant\gamma_i\leqslant1,i=1,2,\cdots,N,\sum_{i=1}^{N}\gamma_i=1\right\}。$$

由于$\mathrm{co}(A_i,i=1,2,\cdots,N)$只是有限个元素的凸包,故它必定是闭集。所以$\overline{\mathrm{co}}(A_i,i=1,2,\cdots,N)=\mathrm{co}(A_i,i=1,2,\cdots,N)$,以后就将这个闭凸包记成$\mathrm{co}(A_i)$。

Γ是$\mathbb{R}^N$中第一卦限内的一个闭凸集。例如在$\mathbb{R}^2$中它是连接(1,0)和(0,1)的闭线段;在$\mathbb{R}^3$中它是以(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)为顶点的闭三角形。

当N是有限整数时,$\mathrm{co}(A_i)$称为由A_i,$i=1,2,\cdots,N$组成的**多胞体**。由此可以看出多胞体实质是由有限个线性元素(矩阵、向量等)生成的凸集。设$[0,T)$是一个时间区间(其中T可以是∞),对给定的$t\in[0,T)$,$x(t)\in\mathbb{R}^n$,定义集合$\mathrm{co}\{A_ix(t))\}=\{Ax(t),A\in\mathrm{co}\{A_i,i=1,2,\cdots,N\}\}$,它的微分包含问题

$$\dot{x}(t)\in\mathrm{co}(A_ix(t)),\tag{4.1.6}$$

就称为**多胞体微分包含**问题。式(4.1.6)的 Cauchy 问题是

$$\dot{x}(t)\in\mathrm{co}(A_ix(t)),\quad x(0)=x_0。$$

在控制理论中,我们总是考虑控制系统。设

$$\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ C_i & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{(n+m)\times(n+r)},\quad i=1,2,\cdots,N,$$

是N个线性控制系统,那么称

$$\mathrm{co}\left\{\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ C_i & 0\end{bmatrix}\right\}=\left\{\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ C_i & 0\end{bmatrix},\gamma\in\Gamma\right\}。$$

是这N个线性控制系统的凸包,根据上面的讨论它是闭的。对应于$\mathrm{co}\left\{\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ C_i & 0\end{bmatrix}\right\}$的多胞体系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\in\mathrm{co}\left\{\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ C_i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ u(t)\end{bmatrix}\right\},\tag{4.1.7}$$

我们将它称为**线性多胞体系统**。注意,其中的第二个方程是代数方程。

2) 多胞体系统的背景

最早正式提出线性多胞体系统控制问题是 Hu 等在研究线性系统的饱和控制时提出的(参阅 2.4 节)。事实上,很多问题可以转化成线性多胞体问题来解决。例如在本书的 2.3 节中,将不连续方程(2.3.5)化成微分包含问题,这个微分包含就是多胞体。

这一小节将继续举一些例子来说明多胞体系统在实际问题中的应用。

例 4.1.1 考虑解微分方程

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x}\sin x^2 。$$

这个微分方程的解不能用初等函数解出。但是我们知道 $\sin x^2 \in [-1,1]$,那么这个微分方程可以扩张成微分包含

$$\dot{x} \in \text{co}(-\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{x}) 。 \tag{4.1.8}$$

式(4.1.8)是一个多胞体系统。解微分方程 $\dot{x} = \beta\sqrt[3]{x}$,其中 $\beta \in [-1,1]$。得到

$$x(t) = \left(\frac{2}{3}\beta t + x^{\frac{2}{3}}(0)\right)^{\frac{3}{2}} 。 \tag{4.1.9}$$

微分包含(4.1.8)的解可以用式(4.1.9)来逼近。如果将时间区域分割成一些很小的区域,在这些小区间上,解近似于式(4.1.9)。当 $x(0)>0$ 时,$\beta \in [-1,0)$,解是衰减的,但是只存在于有限时间区间;当 $x(0)<0$ 时,$\beta \in (0,1]$,解是递增的,也只存在有限时间区间;其他条件下,解都在无穷时间内存在。

例 4.1.2 图 4.2 是 2011 年一次台风的预报。图中右下方的折线描绘了台风中心移动的历史轨迹。这条轨迹的末端为 8 月 5 日 8 时台风中心所在的位置,其左上方涂有阴影的锥形区域是未来 48 小时的台风中心可能到达的区域。尽管图中说明写着“未来 48 小时路径概率预报图”,图上在阴影部分标出了一条曲线,是预测的台风中心轨迹,其上的两个黑点分别是

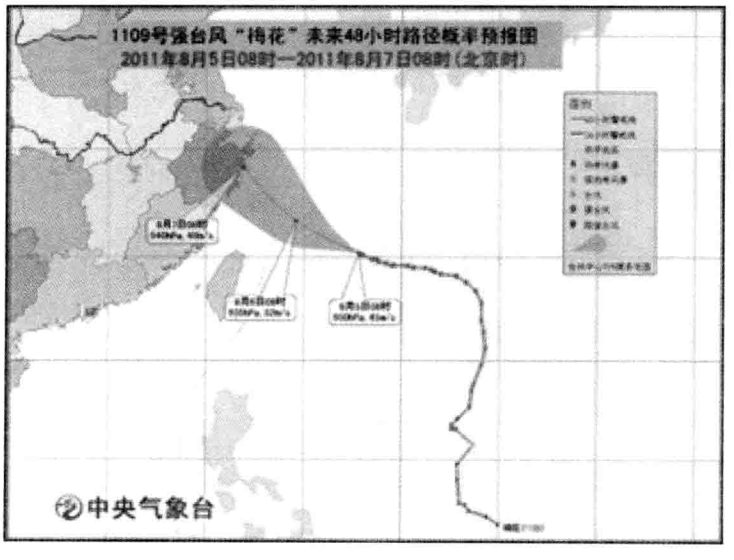


图 4.2 2011 年的一次台风预报

未来 24 小时后和 48 小时后的台风中心的估计。但是图 4.2 没有提供台风中心转移的任何概率信息，也没有任何台风中心移动的预测模型，这些估计的轨线和中心位置看上去像是中心线。

如果用 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示在 t 时刻台风中心的经度和纬度，那么向量 $(x(t)\ \ y(t))^{\mathrm{T}}$ 就是台风中心的坐标，$(\dot{x}(t)\ \ \dot{y}(t))^{\mathrm{T}}$ 就是台风中心移动的方向(速度向量)。用 $(a_1(t)\ \ b_1(t))^{\mathrm{T}}$ 和 $(a_2(t)\ \ b_2(t))^{\mathrm{T}}$ 分别表示图 4.2 中阴影部分的上沿曲线和下沿曲线。将它们重新画于图 4.3，那么有

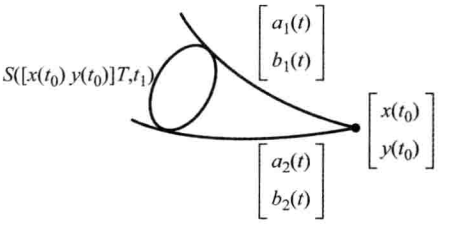


图 4.3　台风中心移动的微分包含描述

$$\dot{a}_2(t) \leqslant \dot{x}(t) \leqslant \dot{a}_1(t) \quad \text{和} \quad \dot{b}_2(t) \leqslant \dot{y}(t) \leqslant \dot{b}_1(t),$$

或者写成

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix} \in \operatorname{co}\left\{\begin{bmatrix}a_2(t)\\ b_2(t)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a_1(t)\\ b_1(t)\end{bmatrix}\right\}, \quad \begin{bmatrix}x(t_0)\\ y(t_0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x(0)\\ y(0)\end{bmatrix}。$$

这是一个多胞体的 Cauchy 问题。用 $S((x(t_0)\ \ y(t_0))^{\mathrm{T}},t)$ 表示这个微分包含的解集。那么集合 $S((x(t_0)\ \ y(t_0))^{\mathrm{T}},t_1)$ 就是 t_1 时刻台风中心所有可能位置的集合。如果假设这个集合上分布是 $F(x,y)$，那么 $(Ex\ \ Ey)^{\mathrm{T}}$ 就是台风中心的期望位置。这个分布是均匀的，那末这个期望位置就是 $S((x(t_0)\ \ y(t_0))^{\mathrm{T}},t)$ 的重心，如果这个分布不是均匀的，那么最可能移动的轨线就不是中心线了。 □

例 4.1.3　很多鲁棒控制问题可以用多胞体系统来描述。

考虑线性系统

$$\dot{x} = (A+\Delta A)x + Bu, \tag{4.1.10}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$，$u\in\mathbb{R}^m$ 分别是系统的状态和输入，$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 是两个确定的矩阵，$\Delta A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 代表系统的不确定性，它是一个未知的、甚至可能是一个可变的矩阵，在鲁棒控制中，常常假设它是一个有界矩阵。设 $\Delta A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$，$\underline{\alpha}\leqslant\alpha_{ij}\leqslant\bar{\alpha}$，那么式(4.1.10)就等价于微分包含系统

$$\dot{x} \in \operatorname{co}((A+\underline{\alpha}I)x+Bu, (A+\bar{\alpha}I)x+Bu)。 \tag{4.1.11}$$

对式(4.1.10)作反馈 $u=Fx$，对应的闭环系统就是微分包含

$$\dot{x} \in \operatorname{co}((A+BF+\underline{\alpha}I)x, (A+BF+\bar{\alpha}I)x), \tag{4.1.12}$$

闭环系统的鲁棒稳定的等价于微分包含系统(4.1.12)是强稳定的。 □

练习

1. 设 $F_0,F_1,\cdots,F_n$ 是一串相同大小的对称矩阵，$x_1,\cdots,x_n$ 是 n 个未知实数，解线性矩阵不等

式就是求向量 $x=(x_1 \quad \cdots \quad x_n)^{\mathrm{T}}$，使得

$$F_0+x_1F_1+\cdots+x_nF_n<0。$$

给出这个解集非空的一个充分条件，并证明这个解集总是凸集。

2. 证明引理 4.1.2。

3. 证明 Γ 是 $\mathbb{R}^N$ 中第一卦限内的一个闭凸集。

4. 有两个多胞体系统

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}, \quad i=1,2,\cdots,N$$

$$\begin{bmatrix} A_j & B_j \\ C_j & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}, \quad i=1,2,\cdots,M$$

写出它们串联和并联后系统的表达。

4.2　凸包 Lyapunov 函数

本节讨论一类特殊的函数，标题上称之为凸包 Lyapunov 函数，这是文献上通用的称谓，其实称为“凸包二次型 Lyapunov 函数”也许更妥当些，因为它是通过一些二次型函数凸组合定义的，这也有理由比单个二次型函数具备更多的优越性。凸包二次型 Lyapunov 函数提出于 21 世纪初，是多胞体系统的分析和设计的重要工具，用来确定系统的不变集和被控不变集，以后又成为研究线性系统的饱和控制的有用工具[11,12]。本节讨论凸包 Lyapunov 函数的定义和性质，这是本章以后的研究和线性多胞体设计的重要基础。

4.2.1　凸包二次型函数

设 $P_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$i=1,2,\cdots,N$，是 N 个正定矩阵，记 $Q_i=P_i^{-1}$，那么 Q_i 也是正定的。定义

$$\Gamma=\left\{\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_N)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^N;\gamma_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,N,\sum_{i=1}^{N}\gamma_i=1\right\},$$

那么 Γ 是 $\mathbb{R}^N$ 中以 $e_i=(0\ \cdots\ \overset{i}{\overset{\downarrow}{1}}\ \cdots\ 0)^{\mathrm{T}}$ 为顶点的单纯型，是一个有界的闭凸集。设 $\gamma\in\Gamma$，用 $Q(\gamma)$ 表示 Q_i 的凸组合：

$$Q(\gamma)=\sum_{i=1}^{N}\gamma_iQ_i,\tag{4.2.1}$$

$Q(\gamma)$ 总是正定的，并且它是 Γ 上的线性从而也是连续映射。再定义 $P(\gamma)=Q^{-1}(\gamma)$，$P(\gamma)$ 自然也是正定的。进一步，由于 $Q(\gamma)\neq 0$（零矩阵），因此 $P(\gamma)$ 也是 Γ 上的连续映射。特别当 $N=1$ 时，$P(\gamma)=P$，而当 $N>1$ 时，$P_i\in\{P(\gamma),\gamma\in\Gamma\}$，所以说可以期望 $P(\gamma)$ 有一些比单个 P_i 具备更好的性质。

定义 4.2.1　记 $Q_i=P_i^{-1}$，正定函数

$$V_c(x)=\min_{\gamma\in\Gamma}x^{\mathrm{T}}P(\gamma)x=\min_{\gamma\in\Gamma}x^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i=1}^{N}\gamma_iQ_i\Big)^{-1}x$$

称为 P_i，$i=1,2,\cdots,N$，的**凸包二次型函数**。　□

尽管 $V_c(x)$ 称为凸包二次型函数，但是 $P(\gamma)$ 并非 P_i 的凸组合，其中的“凸”字是因为 $Q(\gamma)$ 是 Q_i 的凸组合。

由于 Γ 是紧集，因此对每个 x，必定存在一个 $\gamma^*=\gamma^*(x)\in\Gamma$，使得

$$V_c(x)=\min_{\gamma\in\Gamma}x^{\mathrm{T}}P(\gamma)x=x^{\mathrm{T}}P(\gamma^*)x。$$

记号 $\gamma^*=\gamma^*(x)$ 只是说 γ^* 的值与 x 有关，不是说 γ^* 是 x 的函数，下文会给出 γ^* 是 x 的函数的条件，但可以验证 $\gamma^*(x)=\gamma^*(ax)$ 对任意 $a\in\mathbb{R}$ 成立。

定理 4.2.1 $V_c(x)$可以转化成条件优化问题：

$$V_c(x) = \min\{\alpha;\text{存在 } \gamma\in\Gamma,\text{使得 } \alpha\geqslant x^{\mathrm{T}}P(\gamma)x\}。$$

证明：记 $A(x)=\{\alpha;\text{存在 } \gamma\in\Gamma,\text{使得 } \alpha\geqslant x^{\mathrm{T}}P(\gamma)x\}$和$\alpha_0(x)=\inf A(x)$。

由于存在$\gamma^*\in\Gamma$，使得$V_c(x)=x^{\mathrm{T}}P(\gamma^*)x$，所以$V_c(x)\in A(x)$，从而$V_c(x)\geqslant\alpha_0(x)$。

另一方面，对任意$\varepsilon>0$，存在$\alpha\in A(x)$，使得$\alpha_0(x)+\varepsilon>\alpha$，就是存在$\gamma\in\Gamma$，

$$\alpha_0(x)+\varepsilon>\alpha\geqslant x^{\mathrm{T}}P(\gamma)x\geqslant V_c(x)。$$

由于ε是任意的，所以$\alpha_0(x)=V_c(x)$。 □

定理 4.2.1 说明，集合$A(x)$存在最小值，这个最小值就是$V_c(x)$。

由于$P^{-1}(\gamma)=Q(\gamma)>0$，因此$\alpha\geqslant x^{\mathrm{T}}P(\gamma)x$等价于

$$\begin{bmatrix}\alpha & x^{\mathrm{T}}\\ x & Q(\gamma)\end{bmatrix}\geqslant 0。$$

根据定理 4.2.1，可以得到$V_c(x)$的另一个表达式。

$$\begin{aligned}&V_c(x)=\min\alpha\\ &\text{s.t. }\begin{bmatrix}\alpha & x^{\mathrm{T}}\\ x & Q(\gamma)\end{bmatrix}\geqslant 0,\quad \gamma\in\Gamma。\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

带约束的优化问题(4.2.2)可以方便地利用已有的软件完成。

考虑

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\alpha & \lambda x_1^{\mathrm{T}}+(1-\lambda)x_2^{\mathrm{T}}\\ \lambda x_1+(1-\lambda)x_2 & Q(\gamma)\end{bmatrix}\\ =&\lambda\begin{bmatrix}\alpha & x_1^{\mathrm{T}}\\ x_1 & Q(\gamma)\end{bmatrix}+(1-\lambda)\begin{bmatrix}\alpha & x_2^{\mathrm{T}}\\ x_2 & Q(\gamma)\end{bmatrix}。\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

沿用定理 4.2.1 证明中的记号，如果$\alpha_0(x_1)\neq\alpha_0(x_2)$，不妨认为$\alpha_0(x_1)>\alpha_0(x_2)$，那么对任意的$\gamma\in\Gamma$，都有$\begin{bmatrix}\alpha_0(x_2) & x_1^{\mathrm{T}}\\ x_1 & Q(\gamma)\end{bmatrix}<0$，则当$\lambda\to 1^-$时，由式(4.2.3)，对任意的$\gamma\in\Gamma$，$\begin{bmatrix}\alpha_0(x_2) & \lambda x_1^{\mathrm{T}}+(1-\lambda)x_2^{\mathrm{T}}\\ \lambda x_1+(1-\lambda)x_2 & Q(\gamma)\end{bmatrix}<0$。根据函数$\alpha_0(x)$的定义，对这个$\lambda\in[1-\varepsilon,1]$，有$\alpha_0(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)>\alpha_0(x_2)$，这说明不等式

$$\alpha_0(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda\alpha_0(x_1)+(1-\lambda)\alpha_0(x_2)$$

不可能对所有的满足$0\leqslant\lambda\leqslant 1$的$\lambda$都成立，也就是$V_c(x)$不会是凸函数。

由于$V_c(x)$不是凸函数，这给研究带来困难，因此在凸包二次型函数的研究中，我们转而考虑它的层集，下文会证明，层集总是凸的。

回忆在 1.2 定义的层集。用$\mathrm{lev}(f\leqslant\alpha)$表示集合$\{x;x\in\mathrm{dom}\ f,f(x)\leqslant\alpha\}$。如果不是特别说明，本章只考虑由“$\leqslant$”给出的层集，因此，为了使得符号简单，用$L_c(\alpha)$表示$\mathrm{lev}(V_c(x)\leqslant\alpha)$

和用 $L_{P_i}(\alpha)$表示 $\mathrm{lev}(x^{\mathrm{T}}P_ix\leqslant\alpha)$，对其他函数采用类似的记法，这里不再一一指出。特别，当 $\alpha=1$ 时，将这些记号中的(α)略去，例如 $L_c=L_c(1)$。对于一个二次型函数 $x^{\mathrm{T}}\Lambda x$ 来讲，容易建立$L_\Lambda(\alpha)=\sqrt{\alpha}L_\Lambda$ 对任意的 $\alpha\geqslant 0$ 成立，因此关于层集只要讨论 L_Λ 就足够了。因为 $\gamma^*(x)=\gamma^*(ax)$，可以证明对于 $V_c(x)$也成立 $L_c(\alpha)=\sqrt{\alpha}L_c$。

如果 $\gamma^*=\gamma^*(x)$是 x 的连续函数，上文提及的所有层集都是紧的。

4.2.2　凸包二次型函数的层集

这一小节给出 $V_c(x)$层集的一些基本性质。首先证明一个有用的引理。

引理 4.2.1　给定向量 $f\in\mathbb{R}^n$和矩阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}>0$，则 $L_P\subset L_f$ 的充分必要条件是 $f^{\mathrm{T}}P^{-1}f\leqslant 1$，其中的 $L_f=\{x;|\langle f,x\rangle|\leqslant 1\}$。

证明：充分性。由于 $f^{\mathrm{T}}P^{-1}f\leqslant 1$，就是 $1-f^{\mathrm{T}}P^{-1}f\geqslant 0$，根据引理 4.1.1，就是

$$\Phi=\begin{bmatrix}1 & f^{\mathrm{T}}P^{-1}\\ P^{-1}f & P^{-1}\end{bmatrix}\geqslant 0。\tag{4.2.4}$$

对 P^{-1}应用引理 4.1.1，有 $P^{-1}-P^{-1}ff^{\mathrm{T}}P^{-1}\geqslant 0$，左乘和右乘 P 得到 $P\geqslant ff^{\mathrm{T}}$。如果 $x\in L_P$，则 $1\geqslant x^{\mathrm{T}}Px$，就有 $1\geqslant x^{\mathrm{T}}Px\geqslant x^{\mathrm{T}}ff^{\mathrm{T}}x$，即 $x\in L_f$。

必要性。假如不能成立 $P\geqslant ff^{\mathrm{T}}$，则存在 $x_0\in\mathbb{R}^n$，使得 $x_0^{\mathrm{T}}Px_0<x_0^{\mathrm{T}}ff^{\mathrm{T}}x_0$。记 $l=x_0^{\mathrm{T}}Px_0$，则 $l>0$ 和 $(\sqrt{l})^{-1}x_0\in L_P$，但是 $((\sqrt{l})^{-1}x_0)^{\mathrm{T}}ff^{\mathrm{T}}((\sqrt{l})^{-1}x_0)=l^{-1}x_0^{\mathrm{T}}ff^{\mathrm{T}}x_0>l^{-1}x_0^{\mathrm{T}}Px_0=1$，$(\sqrt{l})^{-1}x_0\notin L_f$。这与 $L_P\subset L_f$ 矛盾。所以有 $P\geqslant ff^{\mathrm{T}}$，就是 $P^{-1}-P^{-1}ff^{\mathrm{T}}P^{-1}\geqslant 0$，得到式(4.2.4)，对 1 应用引理 4.1.1，就是 $f^{\mathrm{T}}P^{-1}f\leqslant 1$。　□

关于引理 4.2.1 有如下的注释。

注 1　从几何角度看，$x^{\mathrm{T}}Px=1$ 是$\mathbb{R}^n$中的一个椭球，$f^{\mathrm{T}}x=1$ 是$\mathbb{R}^n$中的一个 $n-1$ 维的超平面，f 是这个超平面的法向量。$|f^{\mathrm{T}}x|\leqslant 1$ 就是夹在两个超平面 $f^{\mathrm{T}}x=\pm 1$ 中的部分。因此 $L_P\subset L_f$ 就是椭球 L_P 夹在这两个超平面中(图 4.4)。$1=x^{\mathrm{T}}Px=x^{\mathrm{T}}ff^{\mathrm{T}}x$ 说明这个椭球和超平面 $f^{\mathrm{T}}x=1$ 相切，切点是 $x_0=P^{-1}f$。对于 $x\in L_P\backslash\{x_0\}$，$|f^{\mathrm{T}}x|<f^{\mathrm{T}}x_0=1$。

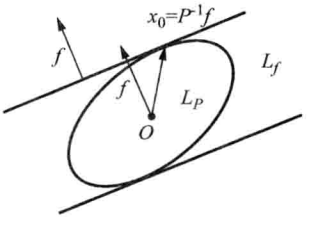


图 4.4　$L_P\subset L_f$ 的说明

如果 $L_P\subset L_f$，$L_P\cap L_f=\emptyset$，那么椭球 $x^{\mathrm{T}}Px=1$ 不接触地完全夹在 $f^{\mathrm{T}}x=\pm 1$ 中，这时 $f^{\mathrm{T}}P^{-1}f<1$。

如果 f_1 是一个和 f 线性相关的向量，即 f_1 与 f 平行，那么 L_{f_1} 与 L_f 是两条平行的带状区域。范数小的对应的区域包含范数大的对应区域。 □

注 2 如果将 f 换成 $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$，那么用同样的方法可以证明成立：$L_P\subset L_H$ 的充分必要条件是 $h_j^{\mathrm{T}}P^{-1}h_j\leqslant 1$，对所有 $j=1,2,\cdots,m$ 成立，其中的 h_j^{T} 是 H 的第 j 行，$L_H=\{x;\|Hx\|_\infty\leqslant 1\}$，$\|Hx\|_\infty$ 是 Hx 的无穷大范数。$L_H=\bigcap_i L_{h_i^{\mathrm{T}}}$，如果用 $\{f_j j=1,2,\cdots\}$ 表示这些超平面 $h_i^{\mathrm{T}}x=\pm 1$ 的交点集，那么 L_H 就是由 $\{f_j,j=1,2,\cdots\}$ 组成的单纯形。$L_P\subset L_H$ 就是椭球 L_P 被围在这个单纯形中。之所以 L_P 是椭球而 L_H 是单纯形，是因为两者采取的范数计算方式不同。 □

注 3 如果 $f^{\mathrm{T}}P^{-1}f=1$，则 Φ 只是个半正定的矩阵。因此必定存在 x 使得 $1=x^{\mathrm{T}}Px=x^{\mathrm{T}}ff^{\mathrm{T}}x$，特别可以要求 $f^{\mathrm{T}}x=x^{\mathrm{T}}f=1$。下面证明这样的 x 是唯一的。

因为式(4.2.4)右面矩阵 Φ 的秩不小于 n，又因为存在非零向量 $[1(-f)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 使得

$$\Phi\begin{bmatrix}1\\-f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & f^{\mathrm{T}}P^{-1}\\ P^{-1}f & P^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-f\end{bmatrix}=0,$$

所以 $\mathrm{rank}\Phi=n-1$，即存在唯一的 x 使得 $[1\quad -x^{\mathrm{T}}P]\Phi[1\quad -x^{\mathrm{T}}P]^{\mathrm{T}}=0$。如果 x 满足 $1=x^{\mathrm{T}}Px$ 和 $f^{\mathrm{T}}x=1$，那么直接验证可以知道它满足 $[1\quad -x^{\mathrm{T}}P]\Phi[1\quad -x^{\mathrm{T}}P]^{\mathrm{T}}=0$，所以这样的 x 是唯一的。 □

下面四个定理给出凸包二次型函数 $V_c(x)$ 层集 L_c 的基本性质。

定理 4.2.2 $L_c=\mathrm{co}\{L_{P_i},i=1,2,\cdots,N\}=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}L_{P(\gamma)}$。

证明：为了简单起见，记 $L_P=\mathrm{co}\{L_{P_i},i=1,2,\cdots,N\}$。

(1) 先证明 $L_P\subset L_c$。任取 $x\in L_P$，则存在 $x_i\in L_{P_i}$，使得 $x=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i x_i$。由于 $x_i\in L_{P_i}$，因此 $1\geqslant x_i^{T}Q_i^{-1}x_i$，于是

$$\begin{bmatrix}1 & x_i^{\mathrm{T}}\\ x_i & Q_i\end{bmatrix}\geqslant 0,\quad \begin{bmatrix}1 & x^{\mathrm{T}}\\ x & Q(\gamma)\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\begin{bmatrix}1 & x_i^{\mathrm{T}}\\ x_i & Q_i\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

就是 $1\geqslant x^{\mathrm{T}}P(\gamma)x\geqslant V_c(x)$，$x\in L_c$。

(2) 再证明 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}L_{P(\gamma)}\subset L_P$。就是要证：对任意的 $\gamma\in\Gamma$，$L_{P(\gamma)}\subset L_P$。

用反证法。如果存在 $\gamma^*\in\Gamma$ 和 $x_0\in L_{P(\gamma^*)}$，$x_0\notin L_P$。由于 L_P 是凸集，根据引理 1.2.2 及其后的注 3，存在向量 n，使得 $\langle n,x_0\rangle>\langle n,x\rangle$，对一切 $x\in L_P$ 成立。

考虑极值问题 $y=\langle n,x\rangle$，其中 $x\in L_{P(\gamma^*)}$，由于 $L_{P(\gamma^*)}$ 是一个椭球，$y=\langle n,x\rangle$ 是一个线性函数，因此存在唯一的最大值，$y_{\max}=\langle n,x^*\rangle$，其中 $x^*\in L_{P(\gamma^*)}$。令 $n^*=\dfrac{n}{\langle n,x^*\rangle}$，那么当 $x\in L_{P(\gamma^*)}$ 时，有 $\max\langle n^*,x\rangle=1$。进一步，$L_{P(\gamma^*)}\subset L_{n^*}$，且超平面 $(n^*)^{\mathrm{T}}x=1$ 与 $L_{P(\gamma^*)}$ 相切。根据引理 4.2.1 后的注 2，

$$(n^*)^{\mathrm{T}}Q(\gamma)n^*=1。\tag{4.2.5}$$

但是，对一切 $x\in L_P$，有 $\langle n,x_0\rangle>\langle n,x\rangle$，所以在用 n^* 代替 n 之后成立：

$$(n^*)^{\mathrm{T}}x<(n^*)^{\mathrm{T}}x_0\leqslant(n^*)^{\mathrm{T}}x^*=1。$$

再次应用引理 4.2.1 后的注 2，对于任意的 $P_i, i=1,2,\cdots,N, L_{P_i}$ 在超平面 $(n^*)^{\mathrm{T}}x=\pm 1$ 之间，并不相交，于是对一切 $i=1,2,\cdots,N$，

$$\begin{bmatrix} 1 & (n^*)^{\mathrm{T}}Q_i \\ Q_i n^* & Q_i \end{bmatrix} > 0。 \tag{4.2.6}$$

如果 $\gamma^* = (\gamma_1^* \quad \gamma_2^* \quad \cdots \quad \gamma_N^*)^{\mathrm{T}}$，那么由式(4.2.6)可以得到

$$\begin{bmatrix} 1 & (n^*)^{\mathrm{T}}Q(\gamma^*) \\ Q(\gamma^*)n^* & Q(\gamma^*) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \gamma^* \begin{bmatrix} 1 & (n^*)^{\mathrm{T}}Q_i \\ Q_i n^* & Q_i \end{bmatrix} > 0。$$

根据引理 4.2.1 后的注 2，成立 $(n^*)^{\mathrm{T}}Q(\gamma)n^*<1$，与式(4.2.5)矛盾。

(3) 最后证明 $L_c \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} L_{P(\gamma)}$。这是因为 $x\in L_c$，根据定义 4.2.1 后的说明，存在 $\gamma^* \in \Gamma$，使得 $1=V_c(x)=\min\limits_{\gamma\in\Gamma} x^{\mathrm{T}}P(\gamma)x = x^{\mathrm{T}}P(\gamma^*)x, x\in L_{P(\gamma^*)} \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} L_{P(\gamma)}$。

这样，我们证明了 $L_c = L_P = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} L_{P(\gamma)}$。 □

定理 4.2.2 给出了凸包二次型函数 $V_c(x)$ 层集 L_c 的几何特征：它是那些 L_{P_i} 的凸包。这个特性给出了它名称的合理性解释。应用 $L_c(\rho)=\sqrt{\rho}L_c$ 这类等式，可以立即得到

$$L_c(\rho) = \mathrm{co}\{L_{P_i}(\rho), i = 1,2,\cdots,N\} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} L_{P(\gamma)}(\rho)。$$

下面的定理将给出 L_c 边界的一个代数性质，先叙述一个概念。

设 A 是一个闭凸集，$x\in A$ 称为是 A 的一个**极端点**，如果 x 不能表示为 A 中其他点的凸组合，例如单纯形，它的顶点就是极端点。在凸分析理论中，一个凸集的很多性质是由它的极端点所确定，因此研究极端点可以事半功倍地掌握凸集的性质。由定理 1.2.2，凸集 A 的极端点必定在 A 的边界上。用 $\mathrm{bd}\ A$ 表示集合 A 的边界。

对 $i=1,2,\cdots,N$，记

$$E_i = \mathrm{bd}\ L_c \cap \mathrm{bd}\ L_{P_i} = \{x; V_c(x) = x^{\mathrm{T}}P_i x = 1\}。$$

根据定理 4.2.2，L_c 是 L_{P_i} 的凸包，因此 L_c 的极端点必然在 E_i 上。下面的定理给出 E_i 的特征。

定理 4.2.3　对于 $i=1,2,\cdots,N$，

$$E_i = \{x \in \mathrm{bd}\ L_c : x^{\mathrm{T}}Q_i^{-1}(Q_j - Q_i)Q_i^{-1}x \leqslant 0, j = 1,2,\cdots,N\}。$$

证明：不失一般性，固定 $i=1$，即要证明

$$E_1 = \{x \in \mathrm{bd}\ L_c : x^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}(Q_j - Q_1)Q_1^{-1}x \leqslant 0, j = 1,2,\cdots,N\}。$$

首先当 $j=1$ 时，$x^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}(Q_j-Q_1)Q_1^{-1}x\leqslant 0$ 总成立，因此只要考虑 $j\neq 1$ 的情形。将 $V_c(x)$ 改写成

$$V_c(x) = \min\left\{x^{\mathrm{T}}\left[Q_1 + \sum_{j=2}^{N}\gamma_j(Q_j - Q_1)\right]^{-1}x, \sum_{j=2}^{N}\gamma_j \leqslant 1, \gamma_j \geqslant 0\right\}。$$

对于固定的 x，定义函数 $\varphi(\gamma_2,\cdots,\gamma_N) = x^{\mathrm{T}}\left[Q_1 + \sum\limits_{j=2}^{N}\gamma_j(Q_j - Q_1)\right]^{-1}x$。考虑集合

$$\Gamma_2 = \left\{(\gamma_2,\cdots,\gamma_N) : \varphi(\gamma_2,\cdots,\gamma_N) \leqslant c, \sum_{j=2}^{N}\gamma_j \leqslant 1, \gamma_j \geqslant 0\right\}。 \tag{4.2.7}$$

则 Γ_2 是有界闭集。

设 $x\in E_1$，因为 $V_c(x)=x^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}x=1$，这意味着函数 φ 最小值在 $(\gamma_2,\cdots,\gamma_N)=(0,\cdots,0)$ 时取得，那么

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_j}\right|_{(\gamma_2,\cdots,\gamma_N)=(0,\cdots,0)}\geqslant 0,\quad j=2,\cdots,N。\tag{4.2.8}$$

这里之所以取“$\geqslant 0$”，是因为对于每一个 $\gamma\in\Gamma_2$，考虑它的第 j 个分量 γ_j，$0\leqslant\gamma_j\leqslant 1$，$\gamma_j=0$ 是端点，它取有最小值，因此沿着 j 轴的增长方向偏导数非负。应用逆矩阵求导的法则，从式(4.2.8)可以得到

$$x^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}(Q_j-Q_1)Q_1^{-1}x\leqslant 0,\quad j=2,3,\cdots,N。\tag{4.2.9}$$

现在考虑如果 $\gamma\in\Gamma_2$，$x\in\mathrm{db}\,L_c$，并使得式(4.2.8)(或者式(4.2.9))成立，要证明 $x\in E_1$。

先证明 Γ_2 是凸集。根据引理 4.1.1，$\varphi(\gamma_2,\cdots,\gamma_N)\leqslant 1$ 等价于

$$\begin{bmatrix}1 & x^{\mathrm{T}}\\ x & Q_1+\sum\limits_{j=2}^{N}\gamma_j(Q_j-Q_1)\end{bmatrix}\geqslant 0。\tag{4.2.10}$$

要证明 Γ_2 是凸集只要证明两个事实，即如果 $(\gamma_2,\cdots,\gamma_N)\in\Gamma_2$，$(\bar{\gamma}_2,\cdots,\bar{\gamma}_N)\in\Gamma_2$，对于任意的 $\delta\in[0,1]$，$\delta\gamma_j+(1-\delta)\bar{\gamma}_j\geqslant 0$，$j=2,3,\cdots,N$ 和 $\sum\limits_{i=2}^{N}\delta\gamma_i+(1-\delta)\bar{\gamma}_i\leqslant 1$；其次

$$\begin{bmatrix}1 & x^{\mathrm{T}}\\ x & Q_1+\sum\limits_{j=2}^{N}[\delta\gamma_j+(1-\delta)\bar{\gamma}_j](Q_j-Q_1)\end{bmatrix}\geqslant 0。$$

只要设 $\gamma_1=1-\sum\limits_{j=2}^{N}\gamma_j$ 和 $\bar{\gamma}_1=1-\sum\limits_{j=2}^{N}\bar{\gamma}_j$，这两个事实可以直接验证，过程从略。

因为 Γ_2 是凸集，式(4.2.8)意味着函数 φ 在 $(\gamma_2,\cdots,\gamma_J)=(0.\cdots,0)$ 时取到最小值，即 $\varphi(0,\cdots,0)=\varphi_{\min}$，而根据 φ 的定义 $\varphi_{\min}=V_c(x)$，当 $x\in\mathrm{bd}\,L_c$ 时，$\varphi_{\min}=V_c(x)=1$。因此 $\varphi_{\min}=\varphi(0,\cdots,0)=x^{\mathrm{T}}Q_1x=1$，就是 $x\in\mathrm{bd}\,L_{P_1}$。根据 E_1 的定义，得到 $x\in E_1$。

于是，我们有

$$E_1=\{x\in\partial L_c:x^{\mathrm{T}}Q_1^{-1}(Q_j-Q_1)Q_1^{-1}x\leqslant 0,j=2,\cdots,N\}。\qquad\square$$

定理 4.2.4 设 $x_0\in\mathrm{bd}\,L_c$，并且假设当 $k=1,2,\cdots,N_0$ 时，$\gamma_k^*>0$，当 $k=N_0+1,\cdots,N$ 时，$\gamma_k^*=0$，那么，$Q(\gamma^*)=\sum\limits_{k=1}^{N_0}\gamma_k^*Q_k$。记，$x_k=Q_kQ(\gamma^*)^{-1}x_0$，$k=1,2,\cdots,N_0$，则

(1) $x_0=\sum\limits_{k=1}^{N_0}\gamma_k^*x_k$。

(2) $x_k\in\mathrm{bd}\,L_{P_k}$。

(3) $\dfrac{\partial V_c(x_0)}{\partial x}=\dfrac{\partial V_c(x_k)}{\partial x_k}=2(Q_k^{-1}x_k)^{\mathrm{T}}=2(Q(\gamma^*)^{-1}x_0)^{\mathrm{T}}$①。

① 按照一般的记法 $\left.\frac{\partial V_c(x_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0}$ 表示 $\frac{\partial V_c(x)}{\partial x}$，本章中它是行向量。

(4) $V_c(x_k)=V_c(x_0)=1, k=1,2,\cdots,N_0$。

证明:(1) 根据定义,$x_k=Q_kQ(\gamma^*)^{-1}x_0, k=1,2,\cdots,N_0$,所以有

$$\sum_{k=1}^{N_0}\gamma_k^* x_k=\sum_{k=1}^{N_0}\gamma_k^* Q_kQ(\gamma^*)^{-1}x_0=Q(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}x_0=x_0。$$

(2) 回忆凸包二次型函数 V_c 的定义,它等价于求:

$$\begin{aligned}&\min V_c(x_0)=x_0^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{k=1}^{N}\gamma_kQ_k\Big)^{-1}x_0,\\&\text{s.t. }\gamma=[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_N]\in\Gamma。\end{aligned}\tag{4.2.11}$$

利用 Lagrange 乘子法来解这个优化问题。引入 Lagrange 乘子 α,β_k 和 $r_k, k=1,2,\cdots,N$,构造式(4.2.11)的 Lagrange 函数为

$$L(\gamma,r,\alpha,\beta)=x_0^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{k=1}^{N}\gamma_kQ_k\Big)^{-1}x_0+\alpha\Big(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k-1\Big)+\sum_{k=1}^{N}\beta_k(\gamma_k-r_k^2),\tag{4.2.12}$$

其中 $\beta=(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \cdots\ \ \beta_N)^{\mathrm{T}}$ 和 $r=(r_1\ \ r_2\ \ \cdots\ \ r_N)^{\mathrm{T}}$,式(4.2.12)的后两项是用来实现 $\gamma\in\Gamma$ 的。

式(4.2.12)的最优解 $(\gamma^*,r^*,\alpha^*,\beta^*)$ 必定满足:

$$\begin{cases}\partial L/\partial\gamma_j\mid_{(\gamma^*,r^*,\alpha^*,\beta^*)}=0,\\ \partial L/\partial r_j\mid_{(\gamma^*,r^*,\alpha^*,\beta^*)}=0,\\ \partial L/\partial\alpha\mid_{(\gamma^*,r^*,\alpha^*,\beta^*)}=0,\\ \partial L/\partial\beta_j\mid_{(\gamma^*,r^*,\alpha^*,\beta^*)}=0,\end{cases}\quad j=1,2,\cdots,N。\tag{4.2.13}$$

具体计算式(4.2.13)可得

$$x_0^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k^*Q_k\Big)^{-1}Q_j\Big(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k^*Q_k\Big)^{-1}x_0-\alpha^*+\beta_j^*=0,\quad j=1,2,\cdots,N,\tag{4.2.14a}$$

$$\beta_j^*\gamma_j^*=0,\quad j=1,2,\cdots,N,\tag{4.2.14b}$$

$$\sum_{k=1}^{N}\gamma_k^*=1,\tag{4.2.14c}$$

$$\gamma_j^*=(r_j^*)^2,\quad j=1,2,\cdots,N。\tag{4.2.14d}$$

由于 $\gamma_k^*>0, k=1,2,\cdots,N_0$,和 $\gamma_k^*=0, k=N_0+1,\cdots,N$,从(4.2.14b)可以得出

$$\beta_k^*=0,\quad k=1,2,\cdots,N_0。\tag{4.2.15}$$

将式(4.2.15)代入式(4.2.14a),有

$$x^{\mathrm{T}}Q(\gamma^*)^{-1}Q_kQ(\gamma^*)^{-1}x_0=\alpha^*,\quad k=1,2,\cdots,N_0,\tag{4.2.16}$$

于是

$$x^{\mathrm{T}}Q(\gamma^*)^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{N_0}\gamma_k^*Q_k\Big)Q(\gamma^*)^{-1}x_0=\alpha^*,$$

即

$$V_c(x_0)=x^{\mathrm{T}}Q(\gamma^*)^{-1}x_0=\alpha^*。\tag{4.2.17}$$

由于 $x_0\in\mathrm{bd}\,L_c$,故 $\alpha^*=1$。

在式(4.2.16)中,用 $x_k=Q_kQ(\gamma^*)^{-1}x_0$ 代入,可得 $x_k^{\mathrm{T}}Q_k^{-1}x_k=1$,就是 $x_k\in \mathrm{bd}L_{P_k}$,$k=1,2,\cdots,N_0$。

(3) 因为 $x_0\in \mathrm{bd}\ L_c$,L_c 是闭凸集,因此根据引理 1.2.2,存在一个 $h_0\in\mathbb{R}^n$,使得 $1=\langle h_0,x_0\rangle\geqslant\langle h_0,x\rangle$对一切 $x\in L_c$ 成立。对这个固定的 x_0,存在 $P(\gamma^*(x_0))$,使得 $V_c(x_0)=x_0^{\mathrm{T}}P(\gamma^*(x_0))x_0$。记 $P_0=P(\gamma^*(x_0))$,记住 P_0 是依赖于 x_0 的。

根据引理 4.2.1,$h_0^{\mathrm{T}}x=1$ 与椭球 $x^{\mathrm{T}}P_0x=1$ 相切于 x_0,因此

$$L_{h_0}\supset L_c\supset L_{P_0}, \tag{4.2.18}$$

或者

$$x_0=P_0^{-1}h_0,\quad h_0^{\mathrm{T}}P_0^{-1}h_0=1。 \tag{4.2.19}$$

定义函数 $\phi(x)=\sqrt{x^{\mathrm{T}}P_0x}$,则 $\phi(x)$是正齐次的,并对所有的 $x\in \mathrm{bd}L_c$ 成立:

$$h_0^{\mathrm{T}}x\leqslant\sqrt{V_c(x)}\leqslant\phi(x), \tag{4.2.20}$$

其中利用了 $h_0^{\mathrm{T}}x\leqslant 1=\sqrt{V_c(x)}$。由于式(4.2.20)中的三个函数都是正齐次的,因此对所有的 $k\geqslant 0$ 和 $x\in \mathrm{bd}L_c(k)$,式(4.2.20)都成立,进一步,它对一切 $x\in\mathbb{R}^n$都成立。

由于$\dfrac{\partial\phi(x)}{\partial x}=\dfrac{2x^{\mathrm{T}}P_0}{2\sqrt{x^{\mathrm{T}}P_0x}}$,当 $x=x_0\in \mathrm{bd}L_c$ 时,有$\left.\dfrac{\partial\phi(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}=x_0^{\mathrm{T}}P_0=h_0^{\mathrm{T}}$。因此根据二次型的连续性成立

$$\phi(x_0+\Delta x)=\phi(x_0)+h_0^{\mathrm{T}}\Delta x+o(\|\Delta x\|),$$

其中 $o(\|\Delta x\|)$是 $\|\Delta x\|$ 的高级无穷小,$\phi(x_0)=1$。另一方面,$h_0^{\mathrm{T}}(x_0+\Delta x)=1+h_0^{\mathrm{T}}\Delta x$。于是,将 $x=x_0+\Delta x$ 代入式(4.2.20)可以得到

$$1+h_0^{\mathrm{T}}\Delta x\leqslant\sqrt{V_c(x_0+\Delta x)}\leqslant 1+h_0^{\mathrm{T}}\Delta x+o(\|\Delta x\|),$$

就是

$$h_0^{\mathrm{T}}\Delta x\leqslant\sqrt{V_c(x_0+\Delta x)}-\sqrt{V_c(x_0)}\leqslant h_0^{\mathrm{T}}\Delta x+o(\|\Delta x\|),$$

同时除以 $\|\Delta x\|$,并令 $\|\Delta x\|\to 0$,就是

$$\left.\frac{\partial\sqrt{V_c(x)}}{\partial x}\right|_{x=x_0}=h_0^{\mathrm{T}}=(P_0x_0)^{\mathrm{T}}。 \tag{4.2.21}$$

于是

$$\frac{\partial V_c(x)}{\partial x}=\frac{\partial(\sqrt{V_c(x)})^2}{\partial x}=2\frac{\partial\sqrt{V_c(x)}}{\partial x},$$

取 $x=x_0$,就得$\left.\dfrac{\partial V_c(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}=2\left.\dfrac{\partial\sqrt{V_c(x)}}{\partial x}\right|_{x=x_0}=2(P_0x_0)^{\mathrm{T}}$,或者写成$\left.\dfrac{\partial V_c(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}=2(P(\gamma^*)x_0)^{\mathrm{T}}$。应用 $x_k=Q_kQ(\gamma^*)^{-1}x_0$,可得$\left.\dfrac{\partial V_c(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}=2(P_kx_k)^{\mathrm{T}}$。

(4) 由于 $x=\sum_{k=1}^{N_0}\gamma_k^*x_k$,因此这些 x_k 与 x_0 在同一个平面上,这个平面必然是 $L_{P(\gamma^*)}$ 在 x_0 处的切面,因此 $x_k\in \mathrm{db}L_c$,所以有 $V_c(x_0)=V_c(x_k)=x_k^{\mathrm{T}}Q_k^{-1}x_k=1$,$k=1,2,\cdots,N_0$。 □

应用 $L_c(\rho)=\sqrt{\rho}L_c$，从定理 4.2.4 可以得到这样的推论。

推论 4.2.1　如果 $x_0^{\mathrm{T}}P(\gamma^*)x_0=\rho$，即 $x_0\in\mathrm{bd}\ L_c(\rho)$，那么

(1) $x_0=\sum_{k=1}^{N_0}\gamma_k^* x_k$，其中 $x_k\in\mathrm{bd}L_{P_k}(\rho)$。

(2) $\dfrac{\partial V_c(x_0)}{\partial x}=\dfrac{\partial V_c(x_k)}{\partial x_k}=2(Q_k^{-1}x_k)^{\mathrm{T}}=2(Q(\gamma^*)^{-1}x_0)^{\mathrm{T}}$。

(3) $V_c(x_k)=V_c(x_0)=\rho,k=1,2,\cdots,N_0$。　□

注　不能简单地从对 $V_c(x)=x^{\mathrm{T}}P(\gamma^*)x$ 求导数得到 $\dfrac{\partial V_c(x)}{\partial x}=2(P(\gamma^*)x)^{\mathrm{T}}$，因为 $\gamma^*=\gamma^*(x)$ 也是 x 的函数，所以 $P(\gamma^*)$ 不是一个常数矩阵。　□

图 4.5 给出由 $L_{P_i},i=1,2,3$ 构成的凸包 L_c。从图可以看出 bd L_c 由两类曲面(线)组成，一类是椭球面，如图中的 A 处；另一类是(超)平面，如图中的 B 处，这个平面是几个椭球的公切面。因为这椭球面和平面是相切的，因此 bd L_c 是一阶连续可微的。

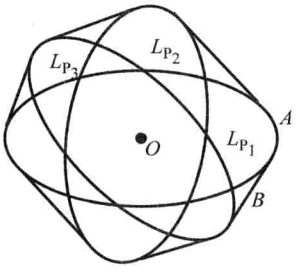


图 4.5　L_c 的构造

L_f 是 bd L_c 的切面，因此也有两种情形。在 A 处它是椭球 L_{P_i} 的切面，在 B 处它就是 B 所在的平面。h_0 就是这个切面的法向量，由于 bd L_c 是一阶连续可微的，因此它的法向量也是连续变化的，根据式(4.2.21)可知 $\dfrac{\partial V_c(x)}{\partial x}$ 是连续的。根据这个结构还可以看出当 x_0 在椭球面上(位置 A)时，它就属于一个 L_{P_i}；当 x_0 在切平面上(位置 B)时，它是这些切点的凸组合。如果不出现 $n+1$ 个椭球有公切面的情形，那么 x_0 可以唯一地表示为这些切点的凸组合。我们将上面的讨论归纳成两个推论，它的证明留给读者。

推论 4.2.2　设 $x_0\in\mathrm{db}L_c$，存在 $x_k\in L_{P_k},k=1,2,\cdots,N_0$，使得 $x_0=\sum_{k=1}^{N}\gamma_k x_k$，那么

(1) $x_k\in\mathrm{db}L_{P_k}$。

(2) 存在唯一的一组 $P_1,P_2,\cdots,P_N$，和唯一的 $\gamma\in\Gamma$，使得 $x_0=\sum_{k=1}^{N}\gamma_k x_k$ 的充分必要条件是 $x_k,k=1,2,\cdots,N$ 线性独立。　□

推论 4.2.3　设 $V_c(x_0)=\rho$，如果 $\gamma_k^*\neq 0,k=1,2,\cdots,N_0;\gamma_k^*=0,k=N_0+1,\cdots,N$，那么存

在 $x_k \in \mathrm{db} L_{P_k} k=1,2,\cdots,N_0$，使得 $x_0 = \sum_{k=1}^{N_0} \gamma_k x_k$；并且 $x_0, x_k, k=1,2,\cdots,N_0$ 在一个超平面 $f^{\mathrm{T}} x=1$ 上，其中 f 是这个超平面的法向量。 □

根据引理 4.2.2 可知，如果对 $P_1, P_2, \cdots, P_N$ 的任意一个公切面，其切点都是线性无关的，那么对任意的 $x_0 \in \mathrm{db}\, L_c$ 都有唯一的分解 $x_0 = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k x_k$。

下面的定理给出了函数 $\gamma^*(x)$ 的一些性质。

定理 4.2.5 (1) 对于任意的 $x \in \partial L_{V_c}$，如果 x 能够唯一表示成 $x = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k x_k$，其中 $x_j \in L_{P_j}, \gamma \in \Gamma$，那么 γ^* 是关于 x 的函数。

(2) 如果 γ^* 是关于的 x 函数，那么 $\gamma^*(x)$ 是连续函数。

证明：(1) 利用反证法。若 $\gamma^*(x)$ 不是 x 的函数，存在某个 x 对应与多个 γ^*，不妨假设有两个，记为 $\gamma^{*(1)}$ 与 $\gamma^{*(2)}$。由定理 4.2.3 知，$x = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^{*(1)} x_k = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^{*(2)} x_k$，这就与 x 能够唯一表示成 $x = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k x_k$ 矛盾。因此 γ^* 是关于 x 的函数。

(2) 也用反证法来证明。若 $\gamma^*(x)$ 在 x_0 处不连续，那么存在序列 $\{x^{(n)}\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x_0$，但是 $\gamma^*(x^{(n)})$ 不收敛于 $\gamma^*(x_0)$。由于对任意的 n，$\gamma^*(x^{(n)}) \in \Gamma$，而 Γ 是闭凸集，因此存在 $\{x^{(n)}\}$ 的子列 $\{x^{(1n)}\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} x^{(1n)} = x_0$，且 $\lim_{n\to\infty} \gamma^*(x^{(1n)}) = \gamma^{*(1)} \neq \gamma^*(x_0)$，往下简记 $\gamma^*(x^{(1n)}) = \gamma^{*(1n)}$。由定理 4.2.3，存在 $x_k^{(1n)} \in L_{P_k}, k=1,2,\cdots,N$，使得

$$x^{(1n)} = \sum_{k=1}^{J} \gamma_k^{*(1n)} x_k^{(1n)}。 \tag{4.2.22}$$

由于 Γ, L_c 和 L_{P_j} 都是紧的，因此总可以找到整数列 $\{k_i; i=1,2,\cdots\}$ 使得 $\{x_{k_i}^{(1n)}\}$ 的子列 $\{x_{k_i}^{(1n)}\}$ 满足 $\{x_{k_i}^{(1n)}\} \subset \{x_k^{(1n)}\}$ 和 $\lim_{i\to\infty} x_{k_i}^{(1n)} = x_k^{(2)}$ 其中 $x_k^{(2)} \in L_{P_k}$。由于 $\{x^{(1n)}\}$ 和 $\{\gamma^{*(1n)}\}$ 都是收敛序列，因此 $\lim_{i\to\infty} \gamma_{k_i}^{*(1n)} = \gamma^{*(1)} \neq \gamma^*(x_0)$ 和 $\lim_{i\to\infty} x^{(1k_i)} = x_0$。在式(4.2.22)两边取极限，得到

$$\lim_{i\to\infty} x^{(1k_i)} = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \gamma_{k_i}^{*(1n)} x_{k_i}^{(1n)},$$

即

$$x_0 = \sum_{k=1}^{J} \gamma_k^{*(1)} x_k^{(2)}。$$

又因为 $\gamma^{*(1)} \neq \gamma^*(x_0)$，

$$x_0 = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^*(x_0) x_k = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^{*(1)} x_k^{(2)},$$

考虑到 $\gamma^{*(1)} \neq \gamma^*(x_0)$，得到 x_0 的两个不同的表达式，这就与前提条件 x_0 的表达式唯一相矛盾，因而假设不成立，即 $\gamma^*(x)$ 是关于 x 的连续函数。 □

定理 4.2.5 的意义在于将判别 $\gamma^*(x)$ 是否唯一的问题转化成 x_k 是否线性相关来判别。

我们知道，当 P_i 知道之后，L_{P_i} 就完全确定了，因此理论上可以确定这些切点是否相关的问题。但是实际中当维数较大时，计算还是非常困难的。

练习

1. 证明：$\gamma^*(x)=\gamma^*(\alpha x)$，对一切 $\alpha\in\mathbb{R}$ 成立。
2. 证明 $L_c(a)=\sqrt{a}L_c(1)$，对一切 $\alpha\in\mathbb{R}_+$ 成立。
3. 证明 $V_c(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数。
4. 设 $P_1=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，求 $V_c(x)$。
5. 证明推论 4.2.1 和推论 4.2.2。

4.3 线性多胞体系统的控制

本节讨论如下线性多胞体系统的控制问题

$$\dot{x}(t) \in \mathrm{co}\{A_i x(t) + B_i u(t), i = 1,2,\cdots,N\}, \tag{4.3.1}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 和 $u(t)\in\mathbb{R}^m$ 分别是系统的状态和输入，$A_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$B_i\in\mathbb{R}^{n\times m}$，$i=1,2,\cdots,N$。设计目的是给出一个状态反馈控制律 $u(t)=K(x(t))$，使得闭环之后，多胞体系统

$$\dot{x}(t) \in \mathrm{co}\{A_i x(t) + B_i K(x(t)), i = 1,2,\cdots,N\} \tag{4.3.2}$$

是强稳定的，或者是强指数稳定的。从式(4.3.2)可以看出，这个设计目的等价于寻找 $u(t)=K(x(t))$，使得 $\dot{x}(t)=A_i x(t)+B_i K(x(t))$，$i=1,2,\cdots,N$ 同时镇定。

本节给出的控制律 $K(x(t))$ 和上节讨论的凸包二次型函数有关，因此一般不是线性的。为了方便叙述，在不会混淆的时候，我们总将 $x(t)$ 和 $u(t)$ 中的自变量 (t) 略去，将式(4.3.1)和式(4.3.2)中的 $i=1,2,\cdots,N$ 略去。

这里先给出一个线性系统的结论，以资对照。

考虑线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

存在线性反馈控制 $u=Kx$，使得闭环系统渐近稳定的充分必要条件是线性矩阵不等式

$$AX + XA^{\mathrm{T}} + BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} < 0, \tag{4.3.3}$$

有解 X 和 Y，其中 X 是正定的。如果式(4.3.3)成立，那么可以取 $K=YX^{-1}$。

结论的证明是直接的，留作练习。由此也可以看出式(4.3.3)有解的充分必要条件是(A,B)是可镇定的。进一步的结论是：如果(A,B)不是可镇定的，那么对于任意的反馈 $u=K(x)$，其中的 $K(x)$可以是非线性的，都不可能使得$\dot{x}=Ax+BK(x)$稳定。

4.3.1 线性多胞体系统的反馈镇定

考虑由式(4.3.1)描述的多胞体系统，另给定 J 个正定矩阵 P_j，$j=1,2,\cdots,J$，记 $Q_j=P_j^{-1}$，再按照定义 4.2.1 构成凸包二次型函数 $V_c(x)$，层集 $L_c(\alpha)$，$L_{P_j}(\alpha)$的意义都与 4.2 节的一样。本节总假设 $\gamma^*(x)$是一个函数。

考虑集合 $\mathrm{bd}\ L_c(\alpha)$，如果对于任意的 $x\in\mathrm{bd}\ L_c(\alpha)$，都成立$\dfrac{\partial V_c(x)}{\partial x}f(x)\leqslant 0$，其中 $f(t)\in\mathrm{co}(A_i x(t)+B_i K(x(t)))$是任意的一个选择，那么根据 Lasalle 不变性原理，任何轨线将趋向 $L_c(\alpha)$中的不变集。由于 $L_c(\alpha)=\sqrt{\alpha}L_c$，$L_{P_j}(\alpha)=\sqrt{\alpha}L_{P_j}$，因此如果对 $x\in\mathrm{bd}L_c$，总成立$\dfrac{\partial V_c(x)}{\partial x}f(x)<$

0，那么这个多胞体系统必定是强稳定的。这个判断是下文论证的主要依据。

先给出一个比较直接的结论及其详细的证明，目的是给出这类问题的证明思路，使得以后的证明可以简化。

定理 4.3.1　如果存在矩阵 $P_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $F_j\in\mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $P_j>0$，$j=1,2,\cdots,J$，使得对一切的 $i=1,2,\cdots,N$ 成立

$$A_iQ_j+Q_jA_i^{\mathrm{T}}+B_iF_j+F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}<0, \tag{4.3.4}$$

其中 $Q_j=P_j^{-1}$，那么存在反馈 $u(t)=K(x(t))$ 使得式(4.3.2)强稳定。

证明：如果存在正定矩阵 $P_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $F_j\in\mathbb{R}^{m\times n}$，使得式(4.3.4)成立，那么根据定义 4.2.1，建立函数 $V_c(x)$，由此得到函数 $\gamma^*=\gamma^*(x)$。

记 $F(\gamma^*)=\sum\limits_{j=1}^{J}\gamma_j^*F_j$ 和 $Q(\gamma^*)=\sum\limits_{j=1}^{J}\gamma_j^*Q_j$，构造反馈律

$$u=F(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}x。 \tag{4.3.5}$$

由于本节已假设 $\gamma^*(x)$ 是一个函数，因此根据定理 4.2.4，由式(4.3.5)定义的反馈是连续的。

在式(4.3.4)两边分别左乘和右乘以 Q_j^{-1} 得到

$$Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}<0。 \tag{4.3.6}$$

下面分两步证明由式(4.3.5)和式(4.3.2)组成的闭环微分包含系统是强稳定的。

(1) 设 $x\in E_j=\mathrm{bd}L_c\cap\mathrm{bd}L_{P_j}$，那么根据定理 4.2.3，成立 $V_c(x)=V_c(x_j)=x_j^{\mathrm{T}}P_jx_j=1$ 和 $\dfrac{\partial V_c(x)}{\partial x}=\dfrac{\partial V_c(x_j)}{\partial x_j}=2(Q_j^{-1}x_j)^{\mathrm{T}}$。于是，

$$\begin{aligned}\dot V_c(x)=\dot V_c(x_j)&\in\mathrm{co}\left\{\frac{\partial}{\partial x}V_c(x)[A_ix+B_iF(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}x]\right\}\Big|_{x=x_j}\\&=\mathrm{co}\{2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}(A_i+B_iF_jQ_j^{-1})x_j\}\\&=\mathrm{co}\{x_j^{\mathrm{T}}(Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1})x_j\}。\end{aligned}$$

由式(4.3.6)，二次型 $x_j^{\mathrm{T}}(Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1})x_j$ 是负定的，而 E_j 是紧集，因此 $\max\limits_{x_j\in E_j}x_j^{\mathrm{T}}(Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1})x_j<0$，进一步，

$$\max_i\max_{x_j\in E_j}x_j^{\mathrm{T}}(Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1})x_j<0,$$

即 $\dot V_c(x_j)<0$。

(2) 设 $x\in\mathrm{bd}L_c$，则由定理 4.2.3(1)，存在 $x_j\in E_j$，$j=1,2,\cdots,J$ 使得 $x=\sum\limits_{j=1}^{J}\gamma_j^*x_j$。不妨设 $\gamma_j^*>0$，$j=1,2,\cdots,J_0$；$\gamma_j^*=0$，$j=J_0+1,\cdots,J$。又由定理 4.2.3(3)，$Q_j^{-1}x_j=Q(\gamma^*)^{-1}x$ 和 $V_c(x)=V_c(x_j)=1$。

首先，根据定理 4.2.3(3)，可得

$$\begin{aligned}\dot V_c(x)&\in\mathrm{co}\left\{\frac{\partial}{\partial x}V_c(x)[A_ix+B_iF(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}x]\right\}\\&=\mathrm{co}\{2x^{\mathrm{T}}Q(\lambda^*)^{-1}[A_i+B_iF(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}x]\}。\end{aligned}$$

考虑

$$\begin{aligned}
&2x^{\mathrm{T}}Q(\lambda^*)^{-1}[A_ix+B_iF(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}x]\\
=&\sum_{j=1}^{J_0}2x^{\mathrm{T}}Q(\lambda^*)^{-1}[\gamma_j^*A_ix_j+\gamma_j^*B_iF_jQ(\gamma^*)^{-1}x]\\
=&\sum_{j=1}^{J_0}2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}[\gamma_j^*A_ix_j+\gamma_j^*B_iF_jQ_j^{-1}x_j]\\
=&\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^*x_j^{\mathrm{T}}[Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}]x_j\\
<&0,
\end{aligned}$$

其中的第一个等式是应用了 $x=\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^*x_j$ 和 $F(\gamma^*)=\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^*F_j$，第二个等式是因为 $Q(\gamma^*)^{-1}x=Q_j^{-1}x_j$。因此与证明的(1)中讨论的一样，可得 $V_c(x)<0$ 对一切 $x\in\mathrm{bd}L_c$ 成立。 □

关于上述证明有下列注释。

注 1 读者可以看出，上述证明中作了一系列的简化。首先是将对任意 $L_c(a)$ 的讨论转化成对固定的 L_c 的讨论，缩小了讨论的范围；然后将对 $x\in\mathrm{bd}L_c$ 转化成对 $x_j\in E_j$ 的讨论。根据定理 4.2.3，在 E_j 上，系统有比较确定的性质，容易开展讨论。从定理 4.3.1 的证明过程可以看出，只要对 $x_j\in E_j$ 结论成立，那么应用凸组合就可以方便地将结论推广到 $\mathrm{bd}L_c$ 上，因此对 $x_j\in E_j$ 的证明是关键。以后我们主要对 $x_j\in E_j$ 证明结论成立，而简化到 $x\in\mathrm{bd}L_c$ 的推广过程。 □

注 2 从定理证明的(1)可以看出要求 $Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}<0$ 是比较过分的，事实上，只要 $x_j^{\mathrm{T}}(Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1})x_j<0$ 对 E_j 上的 x_j 成立就可以了。 □

注 3 当 $a>0$ 时，由于 $\gamma^*(ax)=\gamma^*(x)$，因此反馈 $u=F(\gamma^*(x))Q^{-1}(\gamma^*(x))x$ 关于 x 是正齐次的。 □

注 4 要对 $i=1,2,\cdots,N$ 成立 $A_iQ_j+Q_jA_i^{\mathrm{T}}+B_iF_j+F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}<0$，就是不等式组

$$\begin{cases}
A_1X+XA_1^{\mathrm{T}}+B_1Y+Y^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}<0\\
\qquad\cdots\cdots\\
A_NX+XA_N^{\mathrm{T}}+B_NY+Y^{\mathrm{T}}B_N^{\mathrm{T}}<0
\end{cases}$$

有解 (X,Y)，其中的 X 是正定的。它的充分必要条件是 (A_i,B_i)，$i=1,2,\cdots,N$，可以同时镇定的，必要条件是 (A_i,B_i)，$i=1,2,\cdots,N$，都是可镇定的。因此定理 4.3.1 的条件对于线性反馈也是必要的。 □

推论 4.3.1 在定理 4.3.1 的条件下，必然存在反馈 $u(t)=K(x(t))$ 使得多胞体系统(4.3.2)强指数稳定。

证明：我们只要证明在定理 4.3.1 的条件下，存在正实数 β，使得对一切的 $j=1,2,\cdots,J$ 成立

$$Q_jA_i^{\mathrm{T}}+A_iQ_j+F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}+B_iF_j\leqslant-\beta Q_j,\tag{4.3.7}$$

其中 $Q_i=P_i^{-1}$，那么和定理 4.3.1 的证明几乎完全一样，可以得到对一切 $x\in\mathrm{bd}L_c$ 成立 $\dot{V}_c(x)\leqslant-\beta V_c(x)$，即强指数稳定。

记 $Q_jA_i^{\mathrm{T}}+A_iQ_j+F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}+B_iF_j=-W_{ij}$，那么 W_{ij} 是正定矩阵，存在矩阵 C 使得 $C^{\mathrm{T}}Q_jC$ 和 $C^{\mathrm{T}}W_{ij}C$ 同时对角化，于是存在 $\beta_{ij}>0$，使得 $C^{\mathrm{T}}W_{ij}C\geqslant\beta_{ij}C^{\mathrm{T}}Q_jC$，就是

$$Q_jA_i^{\mathrm{T}}+A_iQ_j+F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}+B_iF_j\leqslant-\beta_{ij}Q_j。$$

令 $\beta=\min\{\beta_{ij},i=1,2,\cdots,N;j=1,2,\cdots,J\}$，则式(4.3.7)成立。　□

从定理 4.3.1 看，尤其是从其后的注 2 看，非线性反馈(4.3.5)没有任何优势，这是导致下面的定理 4.3.2 主要原因。下面的定理看上去略为改进了定理的条件。

定理 4.3.2　如果存在矩阵 $P_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $F_j\in\mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $P_j>0,j=1,2,\cdots,J$，常数 $\beta>0$ 和 $\lambda_{ijk}\geqslant0,i=1,2,\cdots,N;j,k=1,2,\cdots,J$，使得

$$Q_jA_i^{\mathrm{T}}+A_iQ_j+F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}+B_iF_j\leqslant\sum_{k=1}^{J}\lambda_{ijk}(Q_k-Q_j)-\beta Q_j。\tag{4.3.8}$$

其中 $Q_j=P_j^{-1}$，那么存在反馈 $u(t)=K(x(t))$，使得式(4.3.2)闭环后是强指数稳定。

证明：按照定义 4.2.1 构造函数 $V_c(x)$，根据前文约定 $\gamma^*=\gamma^*(x)$ 是函数，因此可以构造 $F(\gamma^*)=\sum_{j=1}^{J}\gamma_j^*F_j$ 和 $Q(\gamma^*)=\sum_{j=1}^{J}\gamma_j^*Q_j$，并设计反馈控制率

$$u=F(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}x。$$

不等式(4.3.8)的两边分别左乘和右乘 Q_j^{-1}，得到

$$A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}A_i+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}\leqslant\sum_{k=1}^{J}\lambda_{ijk}Q_j^{-1}(Q_k-Q_j)Q_j^{-1}-\beta Q_j^{-1}。$$

与定理 4.3.1 的证明一样，分两种情形讨论。

(1) $x\in E_j=\mathrm{bd}L_c\cap\mathrm{bd}L_{P_j}$。由 E_j 的定义可知，$V_c(x)=x^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}x=1$，$\gamma^*$ 的第 j 个分量为 1，其他的都为 0。于是，$F(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}=F_jQ_j^{-1}$ 和 $x=x_j$，且 $\dfrac{\partial}{\partial x}V_c(x)=\dfrac{\partial}{\partial x_j}V_c(x_j)=(2Q_j^{-1}x_j)^{\mathrm{T}}$。沿着闭环系统(4.3.1)的轨线，对 $V_c(x)$ 求导有，

$$\begin{aligned}\dot{V}_c(x)&\in\mathrm{co}\left\{\frac{\partial}{\partial x}V_c(x)[A_ix+B_iF(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}x]\right\}\\&=\mathrm{co}\left\{\frac{\partial}{\partial x}V_c(x)(A_ix_j+B_iF_jQ_j^{-1}x_j)\right\}\\&=\mathrm{co}\{2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}(A_i+B_iF_jQ_j^{-1})x_j\}\\&=\mathrm{co}\{x_j^{\mathrm{T}}(Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1})x_j\}\end{aligned}$$

根据定理条件有

$$\begin{aligned}\dot{V}_c(x)&\leqslant\max_{x_j\in E_j}\{x_j^{\mathrm{T}}(Q_j^{-1}A_i+A_iQ_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1})x_j\}\\&\leqslant\max_{x_j\in E_j}x_j^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{k=1}^{N}\lambda_{ijk}Q_j^{-1}(Q_k-Q_j)Q_j^{-1}-\beta Q_j^{-1}\Big)x_j\end{aligned}$$

$$\leqslant \max_{x_j \in E_j} -\beta x_j^{\mathrm{T}} Q_j^{-1} x_j$$

$$\leqslant -\beta V_c(x),$$

其中应用了定理 4.2.2。

(2) 考虑 $x \in \mathrm{bd}L_{V_c}$。采用和定理 4.3.1(2)的证明一样，可以得到

$$\dot{V}_c(x) \leqslant -\beta V_c(x),$$

详细过程略去。

根据上述两步，在采用了反馈 $u=F(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}x$ 之后，闭环系统是强指数稳定的。 □

下面的两条注释是关于定理 4.3.2 的。

注 1 根据推论 4.3.1 的证明，不等式(4.3.8)等价于

$$Q_j A_i^{\mathrm{T}} + A_i Q_j + F_j^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} + B_i F_j < \sum_{k=1}^{J} \lambda_{ijk}(Q_k - Q_j)。 \tag{4.3.9}$$ □

注 2 从形式上看，不等式(4.3.9)比不等式(4.3.4)容易满足，因为没有要求 $\sum_{k=1}^{J} \lambda_{ijk}(Q_k - Q_j)$ 是负定的。定理 4.3.2 之所以能够将条件放宽是因为我们并不需要式(4.3.4)对一切 $i=1,2,\cdots,N$ 和 $j=1,2,\cdots,J$ 都成立，而只是需要

$$x_j^{\mathrm{T}}(Q_j A_i^{\mathrm{T}} + A_i Q_j + F_j^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} + B_i F_j) x_j < 0 \tag{4.3.10}$$

对一切 $x_j \in E_j = \mathrm{bd}L_c \cap \mathrm{bd}L_{P_j}$ 成立。而根据定理 4.2.2

$$x_j^{\mathrm{T}} Q_j^{-1}(Q_k - Q_j) Q_j^{-1} x_j \leqslant 0。 \tag{4.3.11}$$

不等式(4.3.11)并不蕴含 $Q_j^{-1}(Q_k - Q_j)Q_j^{-1} \leqslant 0$。因为式(4.3.10)难以验证，而式(4.3.9)是一个线性矩阵不等式，可以用现成的软件完成计算。 □

下面的推论也可以说明定理 4.3.2 比定理 4.3.1 的要求要低一些。

推论 4.3.2 如果定理 4.3.1 的条件满足一定存在非零的 λ_{ijk} 使得式(4.3.8)成立。

证明：设 $\lambda = [\lambda_{111}\ \lambda_{112}\ \cdots\ \lambda_{11J}\ \lambda_{121}\ \cdots\ \lambda_{12J}\ \cdots\ \lambda_{NJJ}]^{\mathrm{T}}$，和定义

$$f(\lambda) = A_i^{\mathrm{T}} Q_j^{-1} + Q_j^{-1} A_i + Q_j^{-1} F_j^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} Q_j^{-1} + Q_j^{-1} B_i F_j Q_j^{-1} -$$

$$\sum_{k=1}^{J} \lambda_{ijk} Q_j^{-1}(Q_k - Q_j) Q_j^{-1} + \beta Q_j^{-1},$$

那么它是 λ 的线性映射，所以是连续的。因为 $f(0)<0$，所以存在 $\delta>0$，当 $\|\lambda\|<\delta$ 时，$f(\lambda)<0$。 □

4.3.2 带有时滞线性多胞体系统的反馈镇定

这一小节考虑带有时滞的多胞体系统，由于任何过程都必须占有时间，因此实际系统在运行中总存在时滞，有的时候不考虑时滞不是因为它不存在，而多数是因为不得已而为之。

本小节考虑式(4.3.12)描述的多胞体系统。与式(4.3.2)相比，它多了状态时滞项 $x(t-\tau)$，其中的 $\tau>0$ 称为延迟时间。

$$\begin{cases}\dot{x}(t) \in \operatorname{co}\{A_i x(t) + A_{di} x(t-\tau) + B_i u(t)\}, \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0]。\end{cases} \tag{4.3.12}$$

在式(4.3.12)中，$i=1,2,\cdots,N$，$x(t)\in\mathbb{R}^n$和$u(t)\in\mathbb{R}^m$依然是系统的状态和输入，$\phi(t)$，$t\in[-\tau,0]$是向量值的绝对连续函数，作为初始状态，$A_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$A_{di}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$B_i\in\mathbb{R}^{n\times m}$。设计目的还是寻找一个状态反馈控制律 $u(t)=K(x(t))$，使得闭环之后，多胞体系统

$$\dot{x}(t) \in \operatorname{co}\{A_i x(t) + A_{di} x(t-\tau) + B_i K(x(t))\} \tag{4.3.13}$$

强稳定。

先给出一个引理。

引理 4.3.1　令 $f(t)\in\mathbb{R}^+$是一个连续函数。如果存在$\beta>\alpha>0$，且当 $t\geqslant t_0$ 有

$$\dot{f}(t) \leqslant -\beta f(t) + \alpha \sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t} f(s)。$$

用 ν 表示方程$\nu-\beta+\alpha\mathrm{e}^{\nu\tau}=0$ 唯一的正根，则成立

$$f(t) \leqslant [\sup_{t_0-\tau\leqslant s\leqslant t_0} f(s)]\mathrm{e}^{-\nu(t-t_0)}。$$

引理 4.3.1 称为 **Halany 不等式**，它可以直接验证，也可以查阅文献[8]。

定理 4.3.3　如果存在正定矩阵 $P_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$和$F_j\in\mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $P_j>0$，$j=1,2,\cdots,J$，和$\beta>1$，使得对一切的 $i=1,2,\cdots,N$ 成立

$$A_i Q_j + Q_j A_i^{\mathrm{T}} + B_i F_j + F_j^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} + A_{di} Q_j A_{di}^{\mathrm{T}} \leqslant -\beta Q_j, \tag{4.3.14}$$

其中 $Q_j=P_j^{-1}$，那么存在反馈 $u(t)=K(x(t))$使得式(4.3.12)强指数稳定。

证明：沿用定理 4.3.1 证明中的记号，记 $F(\gamma^*)=\sum_{j=1}^{J}\gamma_j^* F_j$ 和$Q(\gamma^*)=\sum_{j=1}^{J}\gamma_j^* Q_j$，反馈律还是

$$u = F(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}x。$$

下面证明闭环的稳定性。将不等式(4.3.14)的两边分别左乘和右乘 Q_j^{-1}，得

$$A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1} + Q_j^{-1}A_i + Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1} + Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1} + Q_j^{-1}A_{di}Q_jA_{di}^{\mathrm{T}}Q_j^{-1} \leqslant -\beta Q_j^{-1}。$$

先考虑 $x\in E_j$，这时 $V_c(x)=V_c(x_j)=x_j^{\mathrm{T}}P_jx_j=1$，$\dfrac{\partial V_c(x)}{\partial x}=\dfrac{\partial V_c(x_j)}{\partial x_j}=2Q_j^{-1}x_j$。于是，当$j\in\{1,2,\cdots,J\}$时，沿着闭环系统式(4.3.13)的轨线对 $V_c(x)$求导，有

$$\begin{aligned}\dot{V}_c(x) \in \operatorname{co}\Big\{&\frac{\partial}{\partial x}V_c(x)[A_ix + A_{id}x(t-\tau) + \\ &B_iF(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}x], i = 1,2,\cdots,N\Big\},\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

注意为了简单，其中 $x(t)$中的(t)略去了，只保留$(t-\tau)$。由于 $x\in E_j$，就是 $\gamma_j^*=1$，$\gamma_k^*=0$，$k\neq j$，得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_j}V_c(x_j)[A_ix_j + A_{id}x_j(t-\tau) + B_iF_jQ_j^{-1}x_j] \\ =&2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}[A_ix_j + A_{id}x_j(t-\tau) + B_iF_jQ_j^{-1}x_j] \\ =&2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}[A_ix_j + B_iF_jQ_j^{-1}x_j] + 2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}A_{id}x_j(t-\tau)。\end{aligned}$$

应用不等式(4.1.5),得到

$$2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}A_{di}x_j(t-\tau)\leqslant x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}A_{di}Q_jA_{di}^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}x_j+x_j^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_j^{-1}x_j(t-\tau)。$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_j}V_c(x_j)[A_ix_j+A_{di}x_j(t-\tau)+B_iF_jQ_j^{-1}x_j]\\&\leqslant x_j^{\mathrm{T}}[Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}A_{di}Q_jA_{di}^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}]x_j+\\&x_j^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_j^{-1}x_j(t-\tau)。\end{aligned}$$

根据定理给出的条件,对一切 $j=1,2,\cdots,J$ 成立

$$A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}A_i+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}A_{id}Q_jA_{id}^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}\leqslant\beta Q_j^{-1}。$$

因此

$$\dot{V}_c(x_j)\leqslant-\beta x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}x_j+x_j^{\mathrm{T}}(t-\tau)Q_j^{-1}x_j(t-\tau)=-\beta V_c(x_j)+V_c(x_j(t-\tau))。$$

模仿定理 4.3.1 证明中的标准过程,可以得到对一切 $x\in\mathrm{bd}L_{V_c}$,也成立

$$\dot{V}_c(x)\leqslant-\beta V_c(x)+V_c(x(t-\tau))。$$

因为 $\beta>1$,利用引理 4.3.1,$V(x(t))\leqslant\sup\limits_{s\in[-\tau,0]}|\phi(s)|\mathrm{e}^{-\nu t}$,其中 $\nu-\beta+\mathrm{e}^{\nu\tau}=0$ 的唯一解。因此,闭环系统式(4.3.13)强指数稳定。 □

可以得到与定理 4.3.2 相似的结论,证明可以留作练习,我们仅将结论罗列于下。

推论 4.3.3 如果存在矩阵 $P_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $F_j\in\mathbb{R}^{m\times n}$,其中 $P_j>0$,$j=1,2,\cdots,J$,常数 $\lambda_{ijk}\geqslant 0$ 和 $\beta>1$,使得对一切的 $i=1,2,\cdots,N$ 成立

$$Q_jA_i^{\mathrm{T}}+A_iQ_j+F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}+B_iF_j+A_{di}Q_jA_{di}^{\mathrm{T}}\leqslant\sum_{k=1}^{J}\lambda_{ijk}(Q_k-Q_j)-\beta Q_j。$$

其中 $Q_j=P_j^{-1}$,那么存在反馈 $u(t)=K(x(t))=F(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)x(t)$,使得式(4.3.12)闭环后是强指数稳定。 □

在讨论时滞线性多胞体镇定时,我们应用了 Halany 不等式,因此定理中都增加了 $\beta>1$ 的要求,用来保证 $\nu>0$。用于研究时滞系统的不等式不是唯一的,读者如果用其他不等式来代替 Halany 不等式就可以得到其他形式的充分条件,只是从 E_j 出发然后推广到 bd L_c 这个经典的过程都是一样的。

4.3.3 线性多胞体系统的干扰抑制

本小节考虑控制系统设计中的另一个问题:干扰抑制。

考虑下列带有干扰的线性微分包含系统:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\y\end{bmatrix}\in\mathrm{co}\left\{\begin{bmatrix}A_ix+B_iu+T_i\omega\\C_ix\end{bmatrix},i=1,2,\cdots,N\right\},\tag{4.3.16}$$

其中 $\omega=\omega(t)\in\mathbb{R}^q$ 称为系统的扰动,$T_i\in\mathbb{R}^{n\times q}$ 是扰动的增益;$y=y(t)\in\mathbb{R}^r$ 称为系统的输出,$C_i\in\mathbb{R}^{n\times q}$ 称为输出矩阵;式(4.3.16)中的其他符号的意义与式(4.3.1)相同。控制的目标是

寻找一个反馈 $u(t)=K(x(t))$，使得扰动 ω 对状态 $x(t)$ 或者输出 $y(t)$ 的影响尽可能地小。

定理 4.3.4　如果存在正定矩阵 $P_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $F_j\in\mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $P_j>0$，$j=1,2,\cdots,J$，使得对一切的 $i=1,2,\cdots,N$ 成立

$$\begin{bmatrix} M_{ij} & T_i \\ T_i^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix}\leqslant 0, \tag{4.3.17}$$

其中 $M_{ij}=A_iQ_j+Q_jA_i^{\mathrm{T}}+B_iF_j+F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}-\sum_{k=1}^{J}\lambda_{ijk}(Q_k-Q_j)$，$Q_j=P_j^{-1}$；并且 $\|\omega(t)\|_2^2=\int_0^{\infty}\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\mathrm{d}t\leqslant 1$；那么由 $u(t)=F(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)x(t)$ 和式(4.3.16)组成的闭环系统其初始条件为 $x_0=0$ 的轨线将满足 $x(t,0)\in L_c$。

证明：$V_c(x)$ 由上一节定义式(4.2.1)给出。考虑 $V_c(x)$ 沿着式(4.3.16)和 $u=F(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)x$ 闭环轨线的导数

$$\dot{V}_c(x)\in\mathrm{co}\left\{\frac{\partial}{\partial x}V_c(x)[A_ix+B_iF(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)x+T_i\omega\right\}。$$

首先考虑 $x\in E_j$，则成立 $V_c(x)=V_c(x_j)=x_j^{\mathrm{T}}P_jx_j=1$，$\dfrac{\partial V_c(x)}{\partial x}=\dfrac{\partial V_c(x_j)}{\partial x_j}=2(Q_j^{-1}x_j)^{\mathrm{T}}$。

由式(4.3.17)，$M_{ij}+T_iT_i^{\mathrm{T}}\leqslant 0$，两边再分别左乘和右乘 Q_j^{-1} 并将 M_{ij} 代入，可得

$$\begin{aligned} &Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}-\\ &\sum_{k=1}^{J}\lambda_{ijk}Q_j^{-1}(Q_k-Q_j)Q_j^{-1}+Q_j^{-1}T_iT_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}\\ \leqslant&0。\end{aligned}$$

由于 $x\in E_j$，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}V_c(x)[A_ix+B_iF(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)x+T_i\omega]\Big|_{x=x_j}\\ =&2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}[A_ix_j+B_iF_jQ_j^{-1}x_j+T_i\omega]\\ =&x_j^{\mathrm{T}}[Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}]x_j+2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}T_i\omega。\end{aligned}$$

应用不等式(4.1.5)，

$$2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}T_i\omega\leqslant x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}T_iT_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}x_j+\omega^{\mathrm{T}}\omega。$$

所以当 $x\in E_j$ 时，根据定理 4.2.2，

$$\dot{V}_c(x_j)\leqslant x_j^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{k=1}^{J}\lambda_{ijk}Q_j^{-1}(Q_j-Q_k)Q_j^{-1}\Big)x_j+\omega^{\mathrm{T}}\omega\leqslant\omega^{\mathrm{T}}\omega。$$

对于 $x\in\mathrm{bd}L_c$，参照定理 4.3.1 的证明，有 $x=\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^*x_j$ 其中 J_0 的意义见定理 4.3.1 的证明，$x_j\in E_j$，那么

$$\dot{V}_c(x)=\frac{\partial}{\partial x}V_c(x)[A_ix+B_iF(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)x+T_i\omega]$$

$$=2x^{\mathrm{T}}Q^{-1}(\gamma^*)\Big[\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* A_i x_j+\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* B_i F_j Q^{-1}(\gamma^*)x+T_i\omega\Big]$$

$$=2\Big[\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* x^{\mathrm{T}}Q^{-1}(\gamma^*)A_i x_j+\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* x^{\mathrm{T}}Q^{-1}(\gamma^*)B_i F_j Q_j^{-1}x_j\Big]+2x^{\mathrm{T}}Q^{-1}(\gamma^*)T_i\omega$$

$$\leqslant 2\Big[\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}A_i x_j+\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}B_i F_j Q_j^{-1}x_j\Big]+x^{\mathrm{T}}Q^{-1}(\gamma^*)T_i T_i^{\mathrm{T}}Q^{-1}(\gamma^*)x+\omega^{\mathrm{T}}\omega$$

$$\leqslant 2\Big[\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* x_j^{\mathrm{T}}(Q_j^{-1}A_i+Q_j^{-1}B_i F_j Q_j^{-1})x_j\Big]+\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}T_i T_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}x_j+\omega^{\mathrm{T}}\omega,$$

根据前面对 $x\in E_j$ 的讨论，类似地可得

$$2\Big[\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* x_j^{\mathrm{T}}(Q_j^{-1}A_i+Q_j^{-1}B_i F_j Q_j^{-1})x_j\Big]+\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}T_i T_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}x_j$$

$$=2\Big[\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* x_j^{\mathrm{T}}(Q_j^{-1}A_i+Q_j^{-1}B_i F_j Q_j^{-1}+Q_j^{-1}T_i T_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1})x_j\Big]$$

$$\leqslant 0,$$

所以

$$\dot{V}_c(x)\leqslant\omega^{\mathrm{T}}\omega。\tag{4.3.18}$$

对式(4.3.18)两边积分得到

$$V_c(x(t))-V_c(x(0))\leqslant\int_0^t\omega^{\mathrm{T}}(\tau)\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant 1。\tag{4.3.19}$$

因为 $V_c(x(0))=V_c(0)=0$，$V_c(x(t))\leqslant 1$，即 $x(t)\in L_c$。 □

定理 4.3.4 说明，即使存在干扰 ω，只要 $\|\omega\|\leqslant 1$，始于原点的轨线也不会走得太远，一定在 L_c 之内。这个结论可以推广，如果 $x(0)\neq 0$，那么由式(4.3.19)得到 $V_c(x(t))-V_c(x(0))\leqslant 1$，或者写成 $x(t)\in L_c((L_c x(0))+1)$，即轨线不会走得太远，它距离起点所在层集至多单位距离之遥。

定理 4.3.4 没有给出吸引性，下述定理是一个进一步的结果。

定理 4.3.5 如果存在矩阵 $P_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $F_j\in\mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $P_j>0$，$j=1,2,\cdots,J$，存在 $\beta>0$，使得对一切的 $i=1,2,\cdots,N$ 成立

$$\begin{bmatrix}M_{ij}+\beta Q_j & T_i\\ T_i^{\mathrm{T}} & -I\end{bmatrix}\leqslant 0,\tag{4.3.20}$$

其中 M_{ij} 如同定理 4.3.4 中定义，$Q_j=P_j^{-1}$；并且 $\|\omega(t)\|_2^2=\int_0^\infty\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\mathrm{d}t\leqslant 1$；那么在反馈 $u(t)=F(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)x(t)$ 后，式(4.3.16)的闭环系统的 L_c 具有吸引性。

证明：由式(4.3.20)，可得 $M_{ij}+\beta Q_j+T_i T_i^{\mathrm{T}}\leqslant 0$，两边同时左乘和右乘 Q_j^{-1} 可以得到

$$Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_i F_j Q_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}-$$

$$\sum_{k=1}^{J}\lambda_{ijk}Q_j^{-1}(Q_k-Q_j)Q_j^{-1}+Q_j^{-1}T_iT_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}$$
$$\leqslant-\beta Q_j^{-1}。$$

$V_c(x)$依然由上一节定义 4.2.1 给出，那么

$$\dot{V}_c(x)\in\mathrm{co}\left\{\frac{\partial}{\partial x}V_c(x)[A_ix+B_iF(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)x+T_i\omega\right\},$$

如同定理 4.3.4 的证明，可以得到：当 $x\in E_j$ 时，

$$\frac{\partial}{\partial x}V_c(x)[A_ix+B_iF(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)x+T_i\omega]\Big|_{x=x_j}$$
$$=x_j^{\mathrm{T}}[Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}]x_j+2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}T_i\omega,$$

又因为

$$2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}T_i\omega\leqslant x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}T_iT_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}x_j+\omega^{\mathrm{T}}\omega,$$

得到

$$\dot{V}(x(t))\leqslant-\beta V(x(t))+\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)。\tag{4.3.21}$$

依照定理 4.3.4 的证明方法，可以证明当 $x\in\mathrm{bd}L_c$ 时不等式(4.3.21)也成立，进而对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$ 此不等式成立。因此，

$$V(x(t))\leqslant\mathrm{e}^{-\beta t}V(x(0))+\int_0^t\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}\omega^{\mathrm{T}}(\tau)\omega(\tau)\mathrm{d}\tau。$$

因为 $\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}\leqslant1(\tau\leqslant t)$，所以

$$V(x(t))\leqslant\mathrm{e}^{-\beta t}V(x(0))+\int_0^t\omega^{\mathrm{T}}(\tau)\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant\mathrm{e}^{-\beta t}V(x(0))+1。$$

就是 $\overline{\lim_{t\to\infty}}V(x(t))\leqslant1$，$x(t)$将进入 L_c 中。　□

根据推论 4.3.1 中的讨论，如对一切 $j=1,2,\cdots,J;i=1,2,\cdots,N$，成立 $M_{ij}+T_iT_i^{\mathrm{T}}<0$，那么必然存在 $\beta>0$，使得 $M_{ij}+\beta Q_j+T_iT_i^{\mathrm{T}}\leqslant0$，因此得到如下的推论。

推论 4.3.4　如果存在矩阵 $P_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $F_j\in\mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $P_j>0,j=1,2,\cdots,J$，使得对一切的 $i=1,2,\cdots,N$ 成立

$$\begin{bmatrix}M_{ij} & T_i\\ T_i^{\mathrm{T}} & -I\end{bmatrix}<0,$$

其中 M_{ij} 如同定理 4.3.4 中定义，$Q_j=P_j^{-1}$；并且 $\|\omega(t)\|_2^2=\int_0^\infty\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\mathrm{d}t\leqslant1$；那么在反馈 $u(t)=F(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)x(t)$ 后，式(4.3.16)的闭环系统的 L_c 具有吸引性。　□

推论 4.3.4 也可以看成定理 4.3.4 的推论。它提供了当将式(4.3.17)中的“≤”换成“<”后结论的变化。

在结束这一小节的时候，我们给出一个关于干扰抑制的结论。

定理 4.3.6　如果存在正定矩阵 $P_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $F_j\in\mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $P_j>0,j=1,2,\cdots,J$，存在

$\delta>0$，使得对一切的 $i=1,2,\cdots,N$ 成立

$$\begin{bmatrix} M_{ij} & T_i & Q_jC_i^{\mathrm{T}} \\ T_i^{\mathrm{T}} & -I & 0 \\ C_iQ_j & 0 & -\delta^2 I \end{bmatrix} \leqslant 0, \tag{4.3.22}$$

其中 $M_{ij}=A_iQ_j+Q_jA_i^{\mathrm{T}}+B_iF_j+F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}-\sum_{k=1}^{J}\lambda_{ijk}(Q_k-Q_j)$，$Q_j=P_j^{-1}$；那么在反馈 $u(t)=F(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)x(t)$ 后，式(4.3.16)成立当 $x_0=0$ 时，输出 $y(t)$ 满足 $\|y(t)\|_2\leqslant\delta\|\omega(t)\|_2$。

证明：从前面定理的证明中已经可以看出，关键在于从已知条件推导出需要的不等式。根据式(4.3.22)，利用引理 4.1.1 可以得到

$$M_{ij}-\begin{bmatrix} T_i & Q_jC_i^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & -\delta^2 I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} T_i^{\mathrm{T}} \\ C_iQ_j \end{bmatrix}=M_{ij}+T_iT_i^{\mathrm{T}}+\delta^2Q_jC_i^{\mathrm{T}}C_iQ_j\leqslant 0。$$

将 M_{ij} 代入，并左乘和右乘 Q_j^{-1} 可以得到

$$\begin{aligned} &Q_j^{-1}A+A^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}-\\ &\sum_{k=1}^{J}\lambda_{ijk}Q_j^{-1}(Q_k-Q_j)Q_j^{-1}+Q_j^{-1}T_iT_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+C_i^{\mathrm{T}}C_i\\ \leqslant&0。\end{aligned}$$

$V_c(x)$ 依然由定义 4.2.1 给出，那么

$$\dot{V}_c(x)\in\operatorname{co}\left\{\frac{\partial}{\partial x}V_c(x)[A_ix+B_iF(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)x+T_i\omega]\right\},$$

如同定理 4.3.4 的证明，可以得到：当 $x\in E_j$ 时，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}V_c(x)[A_ix+B_iF(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)x+T_i\omega]\Big|_{x=x_j}\\ =&x_j^{\mathrm{T}}[Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}]x_j+2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}T_i\omega\\ =&x_j^{\mathrm{T}}[Q_j^{-1}A_i+A_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}B_iF_jQ_j^{-1}+Q_j^{-1}F_j^{\mathrm{T}}B_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+\delta^{-2}C_j^{\mathrm{T}}C_j]x_j+\\ &2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}T_i\omega-\delta^{-2}x_j^{\mathrm{T}}C_j^{\mathrm{T}}C_jx_j。\end{aligned}$$

应用不等式

$$2x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}T_i\omega\leqslant x_j^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}T_iT_i^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}x_j+\omega^{\mathrm{T}}\omega,$$

可以得到

$$\dot{V}(x(t))-\delta^{-2}y(t)^{\mathrm{T}}y(t)+\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\leqslant 0。 \tag{4.3.23}$$

不难证明式(4.3.23)对于 $x\in\mathrm{bd}L_c$ 成立，继而对一切 $x\in\mathbb{R}^n$ 也成立。对式(4.3.23)积分后得到

$$V(x(t))-V(x(0))\leqslant\delta^{-2}\int_0^t y^{\mathrm{T}}(\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau-\int_0^t\omega^{\mathrm{T}}(\tau)\omega(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

因为 $V(x(t))\geqslant 0$ 和 $V(x(0))=0$，所以

$$\int_0^t \omega^{\mathrm{T}}(\tau)\omega(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \delta^{-2}\int_0^t y^{\mathrm{T}}(\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

证毕。 □

本节讨论线性多胞体的控制问题，讨论了它的吸引、镇定、干扰抑制等设计。这里采用的方法都是从集合 E_j 开始，然后到 L_c，最后可以推广到$\mathbb{R}^n$。由于定义 $V_c(x)$不依赖于具体系统的表达，因而沿着这条路线可以讨论各类线性多胞体系统，本节讨论带有时滞的线性多胞体就是一个例子。作为练习读者不妨模仿本节的方法，讨论带有时滞的系统的扰动抑制问题。

练习

1. 证明定理 4.3.5 在 $\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\leqslant 1$ 下的推断。即证明如果存在正定矩阵 $P_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$和 $F_j\in\mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $P_j>0, j=1,2,\cdots,J$，使得对一切的 $i=1,2,\cdots,N$ 成立

$$\begin{bmatrix} M_{ij}+\beta Q_j & T_i \\ T_i^{\mathrm{T}} & -\beta I \end{bmatrix} \leqslant 0,$$

其中 $M_{ij}=A_iQ_j+Q_jA_i^{\mathrm{T}}+B_iF_j+F_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}-\sum_{k=1}^{J}\lambda_{ijk}(Q_k-Q_j)$，$Q_j=P_j^{-1}$；$\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\leqslant 1$；那么在反馈 $u(t)=F(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)x(t)$下 L_c 具有吸引性。并试着将结论推广到 $L_c(\rho)$。

2. 如果将定理 4.3.5 中别的条件不变，将不等式(4.3.20)改成

$$\begin{bmatrix} M_{ij}+\beta Q_j & T_i \\ T_i^{\mathrm{T}} & -\beta I \end{bmatrix} \leqslant 0,$$

那么 L_c 具有不变性。

3. 证明：存在线性反馈控制 $u=Kx$，使得闭环系统渐近稳定的充分必要条件是线性矩阵不等式

$$AX+XA^{\mathrm{T}}+BY+Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}<0, \tag{4.3.3}$$

有解 X 和 Y，其中 X 是正定的。进一步式(4.3.3)有解的充分必要条件是(A,B)可镇定。

4. 证明推论 4.3.3 和推论 4.3.4。

4.4 线性系统的饱和控制

本章 4.1 节曾经提及线性系统的饱和控制是导致微分包含系统控制研究的一个重要起因，本节就用微分包含作为工具讨论线性系统饱和控制。

4.4.1 线性系统的饱和控制的集合值表示

考虑线性多变量系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{4.4.1}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 和 $u(t)\in\mathbb{R}^m$ 分别是系统的状态和输入，$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$B\in\mathbb{R}^{n\times m}$，并且不失一般性假定 B 是列满秩的，即 $\mathrm{rank}B=m$。以下常记 $B=[b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m]$，即 B 的第 i 列为 b_i。

下列单变量函数 $\sigma(u)$ 称为对称的饱和函数，简称**饱和函数**：

$$\sigma(u) = \begin{cases} \bar{u} & \bar{u} \leqslant u, \\ u & -\bar{u} \leqslant u < \bar{u}, \\ -\bar{u} & u < -\bar{u}, \end{cases} \tag{4.4.2}$$

常数 $\bar{u}$ 称为饱和度。这里将线性部分的斜率固定为 1，并不失一般性，因为总可以将它的作用转移到输入矩阵 B 中。

单变量函数 $dz(u)$ 称为**死区函数**，如果 $dz(u)=u-\sigma(u)$。死区函数和饱和函数都是典型的非线性函数。

由于实际系统的增益总是有限的，因此任何实际系统在正常的工作范围都存在饱和现象，同样任何系统只要存在摩擦就存在死区，因此考虑饱和非线性和死区非线性对于实际系统的控制是非常必须的。

设向量 $u=(u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^m$，定义向量值饱和函数为

$$\sigma(u) = \begin{bmatrix} \sigma(u_1) \\ \sigma(u_2) \\ \vdots \\ \sigma(u_m) \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma(u_i)$，$i=1,2,\cdots,m$ 是由式(4.4.2)定义的单变量饱和函数。我们没有假设 $\bar{u}_i$，$i=1,2,\cdots,m$ 都是一样的，但不失一般性认为斜率都是 1，并且总假定 $\sigma(u)\in\mathbb{R}^m$，即饱和函数的输入输出维数是一样的。类似地可以定义向量值的死区非线性函数，此处不再赘述。

$u(t)=Fx(t)$ 是线性系统(4.4.1)的状态反馈，在线性控制系统设计中，状态反馈是重要的控制手段。如果 $x(t)$ 逐渐变大，反馈量也不断增大，当考虑到存在饱和现象的时候，反馈就成

为 $u(t)=\sigma(Fx(t))$，这时闭环系统就成为

$$\dot{x}=Ax+B\sigma(Fx)。\tag{4.4.3}$$

以后就称式(4.4.3)为饱和系统。类似地，如果考虑死区非线性，即 $u(t)=Fx-\sigma(Fx(t))$，所以闭环系统就成为

$$\dot{x}=(A+BF)x-B\sigma(Fx),\tag{4.4.4}$$

只要设 $\overline{A}=A+BF$，$\overline{B}=-B$，式(4.4.4)就可以化成式(4.4.3)来处理。因此，死区非线性反馈产生的系统式(4.4.4)可以转化成饱和系统式(4.4.3)来研究。

设 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$是一个正定矩阵，$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$。根据 Lyapunov 理论，使得饱和系统(4.4.3)渐近稳定，只要

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V}{\partial x}(Ax+B\sigma(Fx))=2x^{\mathrm{T}}P(Ax+B\sigma(Fx))<0。\tag{4.4.5}$$

应用层集的概念，只要式(4.4.5)在 bd L_P 上成立就足够了。由于饱和函数是一个非线性函数，讨论起来不很方便，人们希望将它转化成线性运算，从而引进了微分包含方法。

定义 Δ 是一个对角矩阵的集合，

$$\Delta=\{D_\eta=\mathrm{diag}(d_{\eta 1}d_{\eta 2}\cdots d_{\eta m}),d_{\eta j}\in\{0,1\}\}。$$

Δ 是一个有限集，它有 2^m 个元素。如果 $D_\eta\in\Delta$，定义 $D_\eta^-=I-D_\eta$，其中的 I 是 $m\times m$ 单位矩阵，那么 $D_\eta^-\in\Delta$。对任意两个矩阵 $F,G\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$D_\eta F+D_\eta^-G$ 也是一个 $m\times n$ 矩阵，它是由 F 和 G 复合而成的，即如果 $d_{\eta j_0}=1$，那么 $D_\eta F+D_\eta^-G$ 的第 j_0 行是 F 的第 j_0 行，否则它的第 j_0 行是 G 中的第 j_0 行向量。

下述引理给出了饱和函数的线性上界。在本章 4.2 节中定义了集合 L_H，设 $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$，用 h_j^{T} 表示 H 的第 j 行，那么 $L_H=\{x;\|Hx\|_\infty\leqslant 1\}=\{x;\max_i|h_i^{\mathrm{T}}x|\leqslant 1\}$。在 4.2 节中指出，$L_H$ 是一个单纯形，它的顶点是超平面 $h_i^{\mathrm{T}}x=\pm 1$，$i=1,2,\cdots,m$，的交点。

引理 4.4.1　设 $F,H\in\mathbb{R}^{m\times n}$，且 $x\in L_H$，则存在 $D_\eta\in\Delta$，使得

$$\sigma(Fx)\leqslant D_\eta Fx+D_\eta^-Hx。$$

证明：我们只要证明对任意的 $i=1,2,\cdots,m$，$\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)\leqslant\max(f_i^{\mathrm{T}}x,h_i^{\mathrm{T}}x)$，那么当 $f_i^{\mathrm{T}}x\geqslant h_i^{\mathrm{T}}x$ 时，取 $d_{\eta i}=1$；否则 $d_{\eta i}=0$。

当 $f_i^{\mathrm{T}}x\geqslant -1$ 时，$\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)\leqslant f_i^{\mathrm{T}}x$；当 $f_i^{\mathrm{T}}x<-1$ 时，$\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)=-1$，而 $x\in L_H$，所以 $|h_i^{\mathrm{T}}x|\leqslant 1$，就是 $\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)\leqslant h_i^{\mathrm{T}}x$。总之 $\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)\leqslant\max(f_i^{\mathrm{T}}x,h_i^{\mathrm{T}}x)$。　□

引理 4.4.1 中的矩阵 $D_\eta\in\Delta$，它的选取和 x 有关，因此严格地说，D_η 应该记成 $D_\eta(x)$。

4.4.2　饱和控制的镇定设计

在引理 4.4.1 的基础上，先给出下述结论。

引理 4.4.2　考虑饱和系统式(4.4.3)。设 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$F,H\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$x\in L_H$，那么，

$$x^{\mathrm{T}}Pb_i\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)\leqslant\max\{x^{\mathrm{T}}Pb_if_i^{\mathrm{T}}x,x^{\mathrm{T}}Pb_ih_i^{\mathrm{T}}x\},$$

其中 $b_i, i=1,2,\cdots,m$ 是 B 的第 i 列，f_i^{T} 和 h_i^{T} 分别是 F 和 H 的第 i 行。

证明：我们分几种情形讨论：

(1) 如果 $x^{\mathrm{T}}Pb_i\geqslant 0$ 而 $f_i^{\mathrm{T}}x\leqslant -1$。这时 $x^{\mathrm{T}}Pb_i\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)=-x^{\mathrm{T}}Pb_i$，而 $x\in L_H$，所以 $|h_i^{\mathrm{T}}x|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant h_i^{\mathrm{T}}x$，进一步 $x^{\mathrm{T}}Pb_i\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)=-x^{\mathrm{T}}Pb_i\leqslant x^{\mathrm{T}}Pb_ih_i^{\mathrm{T}}x$。

(2) 如果 $x^{\mathrm{T}}Pb_i\geqslant 0$ 而 $f_i^{\mathrm{T}}x>-1$。这时 $\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)\leqslant f_i^{\mathrm{T}}x$，$x^{\mathrm{T}}Pb_i\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)\leqslant x^{\mathrm{T}}Pb_if_i^{\mathrm{T}}x$。

(3) 如果 $x^{\mathrm{T}}Pb_i\leqslant 0$ 而 $f_i^{\mathrm{T}}x\geqslant 1$。这时 $x^{\mathrm{T}}Pb_i\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)=x^{\mathrm{T}}Pb_i$，而 $x\in L_H$，所以 $|h_i^{\mathrm{T}}x|\leqslant 1$，即 $1\geqslant h_i^{\mathrm{T}}x$，进一步 $x^{\mathrm{T}}Pb_i\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)=x^{\mathrm{T}}Pb_i\leqslant x^{\mathrm{T}}Pb_ih_i^{\mathrm{T}}x$。

(4) 如果 $x^{\mathrm{T}}Pb_i\leqslant 0$ 而 $f_i^{\mathrm{T}}x<1$。这时 $\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)\geqslant f_i^{\mathrm{T}}x$，$x^{\mathrm{T}}Pb_i\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)\leqslant x^{\mathrm{T}}Pb_if_i^{\mathrm{T}}x$。

总之，

$$x^{\mathrm{T}}Pb_i\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)\leqslant \max\{x^{\mathrm{T}}Pb_if_i^{\mathrm{T}}x, x^{\mathrm{T}}Pb_ih_i^{\mathrm{T}}x\}。$$ □

在本引理的证明过程中，不需要有 P 正定性的假设。在下面的定理中，矩阵 P 的正定性是用来估计吸引域的，层集 $L_P(\rho)$ 的意义见本章 4.2 节。

定理 4.4.1 考虑系统(4.4.3)。设 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$P>0$。如果存在 $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$，使得：

(1) $L_P(\rho)\subset L_H$；

(2) $(A+B(D_\eta F+D_\eta^- H))^{\mathrm{T}}P+P(A+B(D_\eta F+D_\eta^- H))<0$，对一切 $D_\eta\in\Delta$ 成立。

那么 $L_P(\rho)$ 是一个具有吸引性的不变集。

证明：取 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$。考察 $V(x)$ 沿着式(4.4.3)轨线的导数

$$\dot{V}(x)=2x^{\mathrm{T}}P(Ax+B\sigma(Fx))=2x^{\mathrm{T}}PAx+2x^{\mathrm{T}}PB\sigma(Fx)。\tag{4.4.6}$$

应用引理 4.4.2，由于 $x\in L_H$，因此成立

$$x^{\mathrm{T}}PB\sigma(Fx)=\sum_{i=1}^{m}x^{\mathrm{T}}Pb_i\sigma(f_i^{\mathrm{T}}x)\leqslant\sum_{i=1}^{m}\max(x^{\mathrm{T}}Pb_if_i^{\mathrm{T}}x, x^{\mathrm{T}}Pb_ih_i^{\mathrm{T}}x)。\tag{4.4.7}$$

在 $D_\eta=\mathrm{diag}(d_{\eta i}, i=1,2,\cdots,m)$ 中，取 $d_{\eta i}=1$，如果 $x^{\mathrm{T}}Pb_if_i^{\mathrm{T}}x\geqslant x^{\mathrm{T}}Pb_ih_i^{\mathrm{T}}x$，否则 $d_{\eta i}=0$，那么

$$\sum_{i=1}^{m}\max(x^{\mathrm{T}}Pb_if_i^{\mathrm{T}}x, x^{\mathrm{T}}Pb_ih_i^{\mathrm{T}}x)=x^{\mathrm{T}}PB(D_\eta F+D_\eta^- H)x。\tag{4.4.8}$$

注意 $D_\eta=D_\eta(x)$。将式(4.4.8)代入式(4.4.7)，再将式(4.4.7)代入式(4.4.6)，得到

$$\dot{V}(x)=2x^{\mathrm{T}}PAx+2x^{\mathrm{T}}PB\sigma(Fx)\leqslant 2x^{\mathrm{T}}PAx+2x^{\mathrm{T}}PB(D_\eta F+D_\eta^- H)x,$$

在此式中 $D_\eta=D_\eta(x)$，因此要使得 $\dot{V}(x)<0$ 的一个充分条件是

$$(A+B(D_\eta F+D_\eta^- H))^{\mathrm{T}}P+P(A+B(D_\eta F+D_\eta^- H))$$

对一切 $D_\eta\in\Delta$ 都是负定的。这里要求对一切 $D_\eta\in\Delta$ 成立，因而

$$\dot{V}(x)\leqslant x^{\mathrm{T}}[(A+B(D_\eta F+D_\eta^- H))^{\mathrm{T}}P+P(A+B(D_\eta F+D_\eta^- H))]x<0$$

对一切 $x\in L_H$ 成立。由于对一切 $x\in \mathrm{bd}L_P(\rho)\subset L_H$，因此成立 $\dot{V}(x)<0$，$x\in \mathrm{bd}\ L_P(\rho)$，即 $L_P(\rho)$ 是具有吸引性的不变集，其吸引域可以是 L_H。 □

关于定理 4.4.1 有下述两个注释。

注 1 如果 $0\in L_P(\rho)$ 是 $L_P(\rho)$ 中唯一的不变集，那么根据 LaSalle 不变性原理，当定理 4.4.1的条件满足时，式(4.4.3)表示的闭环系统是局部渐近稳定的。 □

注 2　在定理 4.4.1 的条件中，条件(2)是本质的。因为 L_H 是确定的集合，而 $L_P(\rho)=\sqrt{\rho}L_P$，因此总存在 ρ，使得 $L_P(\rho)\subset L_H$。因此总存在吸引域。　□

推论 4.4.1　定理 4.4.1 中的 F 和 H 必然镇定(4.4.1)，即 $A+BF$ 和都 $A+BH$ 是 Hurwitz 矩阵。

证明：根据定理 4.4.1 的条件(2)，不等式

$$(A+B(D_\eta F+D_\eta^- H))^{\mathrm{T}}P+P(A+B(D_\eta F+D_\eta^- H))<0$$

对一切 $D_\eta\in\Delta$ 成立。因此取 $D_\eta=I$，则 $D_\eta^-=0$，上式就是 $(A+BF)^{\mathrm{T}}P+P(A+BF)<0$，$A+BF$ 是 Hurwitz 矩阵。类似地可证 $A+BH$ 也是 Hurwitz 矩阵。从略。　□

推论 4.4.2　考虑系统式(4.4.3)。设 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$P>0$，如果存在 $K\in\mathbb{R}^{m\times n}$，使得：

(1) $L_P(\rho)\subset L_{KF}$；

(2) $(A+B(D_\eta F+D_\eta^- KF))^{\mathrm{T}}P+P(A+B(D_\eta F+D_\eta^- KF))<0$，对一切 $D_\eta\in\Delta$ 成立。

那么 $L_P(\rho)$ 是一个具有吸引性的不变集。　□

一般对于一个给定的系统式(4.4.3)，矩阵 F 是给定的。推论 4.4.2 的意义是指出可以基于 F 来找 H。

下面的定理将结论推广到应用凸包 Lyapunov 函数的镇定问题。

定理 4.4.2　如果存在正定矩阵 $P_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和矩阵 $F_j,H_j\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$j=1,2,\cdots,J$，以及常数 $\lambda_{\eta jk}\geqslant 0$，$i\in\{1,2,3,\cdots,2^m\}$，$j,k\in\{1,2,\cdots,J\}$，使得：

(1) $L_{P_j}\subset L_{H_j}$；

(2) 对任意一个 $\eta=1,2,\cdots,2^m$ 和 $D_\eta\in\Delta$，成立，

$$Q_jA^{\mathrm{T}}+AQ_j+(D_\eta F_j+D_\eta^- H_jQ_j)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+B(D_\eta F_j+D_\eta^- H_jQ_j)<\sum_{k=1}^{J}\lambda_{\eta jk}(Q_k-Q_j),$$

其中 $Q_j=P_j^{-1}$。

按照本章 4.2 节构造 $Q(\gamma^*)$，即 $Q(\gamma^*)=\sum_{j=1}^{J}\gamma_j^*Q_j$，另外定义 $F(\gamma^*)=\sum_{j=1}^{J}\gamma_j^*F_j$，那么应用饱和反馈

$$u=\sigma(F(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}x),\tag{4.4.9}$$

饱和系统(4.4.3)是强渐近稳定的。

证明：根据定理 4.4.1 的证明，关键在于构造一个 $H(\gamma^*)$，使得 $L_{P(\gamma^*)}\subset L_{H(\gamma^*)}$。

由引理 4.2.1，定理给出的条件(1)就是

$$\begin{bmatrix}1 & z_{ij}^{\mathrm{T}}\\ z_{ij} & Q_j\end{bmatrix}\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,J。\tag{4.4.10}$$

其中 z_{ij}^{T} 是矩阵 H_jQ_j 的第 i 行。由于 $\gamma_j^*\geqslant 0$，$\sum_j\gamma_j^*=1$，从式(4.4.10)可以推出，

$$\begin{bmatrix}1 & \sum_{j=1}^{J}\gamma_j^*z_{ij}^{\mathrm{T}}\\ \sum_{j=1}^{J}\gamma_j^*z_{ij} & Q(\gamma^*)\end{bmatrix}\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,m,\tag{4.4.11}$$

式中的 $\sum_{j=1}^{J}\gamma_j^* z_{ij}^{\mathrm{T}}$ 为 $\sum_{j=1}^{J}\gamma_j^* H_jQ_j$ 的第 i 行。记 $H(\gamma^*)=\sum_{k=1}^{J}\gamma_k^* H_kQ_kQ(\gamma^*)^{-1}$，那么 $H(\gamma^*)\in\mathbb{R}^{m\times n}$，并且

$$\sum_{j=1}^{J}\gamma_j^* H_jQ_j = H(\gamma^*)Q(\gamma^*),$$

于是 $\sum_{j=1}^{J}\gamma_j^* z_{ij}^{\mathrm{T}}$ 又为 $H(\gamma^*)Q(\gamma^*)$ 的第 i 行。因此，再由引理 4.2.1，式(4.4.11)意味着

$$L_{P(\gamma^*)}\subset L_{H(\gamma^*)}。\tag{4.4.12}$$

在条件(2)给出的不等式的两边分别左乘右乘 Q_j^{-1}，得到

$$\begin{aligned}&[A+B(D_\eta F_jQ_j^{-1}+D_\eta^- H_j)]^{\mathrm{T}}Q_j^{-1}+Q_j^{-1}[A+B(D_\eta F_jQ_j^{-1}+D_\eta^- H_j)]\\&<\sum_{k=1}^{J}\lambda_{\eta jk}Q_j^{-1}(Q_k-Q_j)Q_j^{-1}\end{aligned}\tag{4.4.13}$$

对一切 $D_\eta\in\Delta$ 成立。

定义 E_j 如本章 4.2 节。首先设 $x=x_j\in E_j=\mathrm{bd}L_c\cap\mathrm{bd}L_{P_i}$。这时

$$\begin{aligned}\dot{x}=\dot{x}_j&=Ax_j+B\sigma(D_\eta F(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1})x_j\\&\leqslant Ax_j+B(D_\eta F(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}+D_\eta^- H(\gamma^*))x_j\\&=Ax_j+B(D_\eta F_jQ_j^{-1}+D_\eta^- H_j)x_j。\end{aligned}$$

注意这里的 $D_\eta\in\Delta$ 是依赖于 $x=x_j$ 的。根据式(4.4.13)可以得到 $\dot{V}(x)=\dot{V}(x_j)<0$。

设 $x\in\mathrm{bd}L_c$，参照上一节采用的方法，假定当 $j=1,2,\cdots,J_0$ 时，$\gamma_j^*(x)>0$，而当 $j=J_0+1,\cdots,J$ 时 $\gamma_j^*(x)=0$。由定理 4.2.3 可以得到 $x=\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* x_j$，其中 $x_j\in E_j$，和 $Q(\gamma^*)^{-1}x=Q_j^{-1}x_j$，$j=1,2,\cdots,J_0$。

在定理 4.3.1 的证明中，已经得到 $F(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}x=\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* F_jQ_j^{-1}x_j$。另外

$$H(\gamma^*)x=\Big(\sum_{j=1}^{J}\gamma_j^* H_jQ_jQ(\gamma^*)^{-1}\Big)x=\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* H_jQ_jQ_j^{-1}x_j=\sum_{j=1}^{J_0}\gamma_j^* H_jx_j。$$

参照 4.3.1 的证明，应用上述关系式可以得到，当 $x\in\mathrm{bd}L_c$ 时

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=\frac{\partial V}{\partial x}(Ax+B(D_\eta F(\gamma^*)Q^{-1}(\gamma^*)+D_\eta^- H(\gamma^*))x\\&=\sum_{j}^{J_0}2\gamma_j^* x_j^{\mathrm{T}}Q_j(Ax_j+B(D_\eta F_jQ_j^{-1}+D_\eta^- H_j))x_j,\end{aligned}$$

详细过程略去。于是当 $x\in\mathrm{bd}L_c$ 时 $\dot{V}(x)<0$，即在饱和控制 $\sigma(F(\gamma^*)Q(\gamma^*)^{-1}x)$ 下，饱和系统(4.4.3)渐近稳定。 □

和推论 4.4.1 一样，我们可以断言 $A+BF_jQ_j^{-1}$ 和 $A+B\mathrm{H}_j$ 都是 Hurwitz 矩阵，即 $F_jQ_j^{-1}$ 和 H_j 都镇定(A,B)。

这一小节给出的方法可以认为是应用集合值映射讨论饱和反馈的一般步骤。读者不妨可以与本章 4.3 节讨论多胞体微分包含的过程进行比较。在讨论饱和反馈的时候我们都增加了

一个约束条件 $L_P(\rho)\subset L_H$，这是为了能够应用引理 4.4.1，得到饱和影射的一个集合值上界。由于饱和反馈多研究一个线性系统，因此总可以从定理 4.4.1 开始，先对一个正定矩阵 P 进行讨论，然后推广到凸包二次型函数。读者如果有兴趣不妨可以将本节讨论的方法用于多胞体系统 $\dot{x}\in \mathrm{co}\{A_ix+B_i\sigma(u);i=1,2,\cdots,N\}$ 的讨论。

4.4.3　饱和控制的干扰抑制

本小节要应用上一节的方法研究带有干扰的线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu+T\omega,\\ y&=Cx\end{aligned}\tag{4.4.14}$$

在饱和控制下的干扰抑制问题，其中，$y\in\mathbb{R}^r$ 为系统的输出，$C\in\mathbb{R}^{r\times n}$ 称为输出矩阵，$\omega\in\mathbb{R}^q$ 称为系统的干扰，$T\in\mathbb{R}^{n\times q}$ 称为干扰增益。依然假定 ω 是有界的。

先考虑存在饱和非线性系统在线性反馈 $u=Fx$ 下的控制问题，即闭环系统为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+B\sigma(Fx)+T\omega,\\ y&=Cx。\end{aligned}\tag{4.4.15}$$

定理 4.4.3　考虑系统(4.4.15)。设 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$P>0$，干扰 $\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\leqslant 1$。如果存在 F，$H\in\mathbb{R}^{m\times n}$，使得：

(1) $L_P(\rho)\subset L_H$；

(2) 对一切 $D_\eta\in\Delta$，存在 $\delta>0$，使得

$$\begin{bmatrix}(A+B(D_\eta F+D_\eta^-H))^{\mathrm{T}}P+P(A+B(D_\eta F+D_\eta^-H))+\dfrac{\delta}{\rho}Q & T\\ T^{\mathrm{T}} & -\delta I\end{bmatrix}<0。$$

那么 $L_P(\rho)$ 是一个具有吸引性的不变集。

证明：根据引理 4.4.2，对任意的 $x\in L_P(\rho)$，由于 $L_P(\rho)\subset L_H$，因此存在 $D_\eta\in\Delta$ 使得 $PB\sigma(Fx)\leqslant PB(D_\eta F+D_\eta^-H)x$。

取 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$，那么沿着式(4.4.14)的轨线对 $V(x)$ 求导数，得到

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=\frac{\partial V}{\partial x}(Ax+B\sigma(Fx)+T\omega)\\ &=2x^{\mathrm{T}}P(Ax+B\sigma(Fx)+T\omega)\\ &\leqslant 2x^{\mathrm{T}}PAx+2x^{\mathrm{T}}PB(D_\eta F+D_\eta^-H)x+2x^{\mathrm{T}}PT\omega。\end{aligned}$$

由不等式(4.1.5)，

$$2x^{\mathrm{T}}PT\omega\leqslant\frac{1}{\delta}x^{\mathrm{T}}PTT^{\mathrm{T}}Px+\delta\omega^{\mathrm{T}}\omega\leqslant\frac{1}{\delta}x^{\mathrm{T}}PTT^{\mathrm{T}}Px+\delta,$$

其中应用了 $\omega^{\mathrm{T}}\omega\leqslant 1$。

应用引理 4.1.4，定理给出的条件(2)蕴含了

$$AQ+QA^{\mathrm{T}}+B(D_\eta F+D_\eta^-H)Q+Q(D_\eta F+D_\eta^-H)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\frac{\delta}{\rho}Q+\frac{1}{\delta}TT^{\mathrm{T}}<0。$$

两边分别左乘和右乘以 $Q^{-1}=P$，得到

$$PA+A^{\mathrm{T}}P+PB(D_\eta F+D_\eta^- H)+(D_\eta F+D_\eta^- H)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P+\frac{\delta}{\rho}P+\frac{1}{\delta}PTT^{\mathrm{T}}P \tag{4.4.16}$$
$$<0。$$

于是

$$\dot{V}(x)\leqslant 2x^{\mathrm{T}}PAx+2x^{\mathrm{T}}PB(D_\eta F+D_\eta^- H)x+\frac{1}{\delta}x^{\mathrm{T}}PTT^{\mathrm{T}}Px+\delta$$
$$<-\frac{\delta}{\rho}x^{\mathrm{T}}Px+\delta。$$

$x\in L_P(\rho)$ 意味着 $x^{\mathrm{T}}Px\leqslant\rho$，因此 $\dot{V}(x)<0$，即 $L_P(\rho)$ 是具有吸引性的不变集。 □

定理 4.4.3 可以有它的凸包二次型的形式，我们仅罗列在下，将证明留给读者。

推论 4.4.3 考虑系统式(4.4.15)。设 $P_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$P_j>0$，$j=1,2,\cdots,J$。如果存在 F_j，$H_j\in\mathbb{R}^{m\times n}$，使得：

(1) $L_{P_j}\subset L_{H_j}$，$j=1,2,\cdots,J$；

(2) 对一切 $D_\eta\in\Delta$，存在 $\delta>0$ 和 $\lambda_{\eta jk}>0$，使得对一切 $\eta=1,2,\cdots,2^m$；$j=1,2,\cdots,J$，

$$\begin{bmatrix}M_{\eta j}+\delta Q_j & T\\ T^{\mathrm{T}} & -\delta I\end{bmatrix}<0,$$

其中 $M_{\eta j}=Q_jA^{\mathrm{T}}+AQ_j+(D_\eta F_j+D_\eta^- H_jQ_j)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+B(D_\eta F_j+D_\eta^- H_jQ_j)-\sum_{k=1}^{J}\lambda_{\eta jk}(Q_k-Q_j)$，那么 L_c 是一个具有吸引性的不变集。 □

定理 4.4.4 考虑系统式(4.4.15)。设 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$P>0$，干扰 $\|\omega(t)\|\leqslant 1$。如果存在 F，$H\in\mathbb{R}^{m\times n}$，使得：

(1) $L_P\subset L_H$；

(2) 对一切 $D_\eta\in\Delta$，存在 $\delta>0$，使得

$$\begin{bmatrix}(A+B(D_\eta F+D_\eta^- H))^{\mathrm{T}}P+P(A+B(D_\eta F+D_\eta^- H))+\delta Q & T\\ T^{\mathrm{T}} & -\delta I\end{bmatrix}\leqslant 0。$$

那么 L_c 是具有**终极吸引性**。

证明：和定理 4.4.2 的证明一样，设 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$，那么沿着式(4.4.13)的轨线对 $V(x)$ 求导数，得到

$$\dot{V}(x)\leqslant 2x^{\mathrm{T}}PAx+2x^{\mathrm{T}}PB(D_\eta F+D_\eta^- H)x+2x^{\mathrm{T}}PT\omega。$$

由不等式(4.1.5)，

$$2x^{\mathrm{T}}PT\omega\leqslant x^{\mathrm{T}}PTT^{\mathrm{T}}Px+\omega^{\mathrm{T}}\omega。$$

应用条件(2)和引理 4.1.1，得到

$$\dot{V}(x(t))\leqslant-\delta V(x(t))+\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)。$$

由于

$$V(x(t)) \leqslant \mathrm{e}^{-\delta t}V(x(0)) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\delta(t-\tau)}\omega^{\mathrm{T}}(\tau)\omega(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \mathrm{e}^{-\delta t}V(x(0)) + 1。$$

因此$\overline{\lim_{t\to\infty}}V(x(t)) \leqslant 1$，即 L_c 具有终极吸引性。 □

定理 4.4.3 也可以推广到凸包二次型函数。

推论 4.4.4　考虑系统式(4.4.15)。设 $P_j \in \mathbb{R}^{n\times n}, P_j > 0, j=1,2,\cdots,J$；干扰 $\| \omega(t) \| \leqslant 1$。如果存在 $F_j, H_j \in \mathbb{R}^{m\times n}, j=1,2,\cdots,J$，使得：

(1) $L_{P_j} \subset L_{H_j}, j=1,2,\cdots,J$；

(2) 对一切 $D_\eta \in \Delta$，存在 $\delta > 0$ 和 $\lambda_{\eta jk} > 0$，使得对一切 $\eta=1,2,\cdots,2^m; j=1,2,\cdots,J$，

$$\begin{bmatrix} M_{\eta j} + \delta Q_j & T \\ T^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix} < 0,$$

其中 $M_{\eta j} = Q_j A^{\mathrm{T}} + AQ_j + (D_\eta F_j + D_\eta^- H_j Q_j)^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} + B(D_\eta F_j + D_\eta^- H_j Q_j) - \sum_{k=1}^{J} \lambda_{\eta jk}(Q_k - Q_j)$。

那么 L_c 具有终极吸引性。 □

最后的结论是关于干扰抑制的。定理 4.4.5 可以完全模仿定理 4.3.6 的证明获证，推论 4.4.5 则可以用推论 4.4.3 的证明过程获证。因此都省略了。

定理 4.4.5　考虑系统式(4.4.15)。设 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}, P > 0$。如果存在 $F, H \in \mathbb{R}^{m\times n}$，使得：

(1) $L_P(\rho) \subset L_H$；

(2) 对一切 $D_\eta \in \Delta$，存在 $\delta > 0$，使得

$$\begin{bmatrix} M_\eta & T & QC^{\mathrm{T}} \\ T^{\mathrm{T}} & -I & 0 \\ CQ & 0 & -\delta^2 I \end{bmatrix} \leqslant 0,$$

其中 $M_\eta = AQ + QA^{\mathrm{T}} + B(D_\eta F + D_\eta^- H) + (D_\eta F + D_\eta^- H)^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}$。

那么当 $x(0)=0$ 时，输出 $y(t)$ 满足 $\| y(t) \| \leqslant \delta \| \omega(t) \|$。 □

推论 4.4.5　考虑系统式(4.4.15)。设 $P_j \in \mathbb{R}^{n\times n}, P_j > 0, j=1,2,\cdots,J$。如果存在 $F_j, H_j \in \mathbb{R}^{m\times n}, j=1,2,\cdots,J$，使得：

(1) $L_{P_j} \subset L_{H_j}, j=1,2,\cdots,J$；

(2) 对一切 $D_\eta \in \Delta$，存在 $\delta > 0$ 和 $\lambda_{\eta jk} > 0$，使得对一切 $\eta=1,2,\cdots,2^m; j=1,2,\cdots,J$，

$$\begin{bmatrix} M_{\eta j} & T & Q_j C^{\mathrm{T}} \\ T^{\mathrm{T}} & -I & 0 \\ CQ_j & 0 & -\delta^2 I \end{bmatrix} \leqslant 0,$$

其中 $M_{\eta j} = AQ_j + Q_j A^{\mathrm{T}} + B(D_\eta F_j + D_\eta^- H_j Q_j) + (D_\eta F_j + D_\eta^- H_j Q_j)^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}$。

那么当 $x(0)=0$ 时，输出 $y(t)$ 满足 $\| y(t) \| \leqslant \delta \| \omega(t) \|$。 □

练习

1. 考虑死区非线性

$$dz(u)=\begin{cases}u-\bar{u}, & u\geqslant\bar{u},\\ 0, & -\bar{u}\leqslant u<\bar{u},\\ u+\bar{u}, & u<-\bar{u}。\end{cases}$$

其中 $\bar{u}>0$，称为死区边界。证明：

(1) $dz(u)\in\mathrm{co}\{0,u-v\}$，其中 $v\in[-\bar{u},\bar{u}]$。

(2) 如果只考虑 $dz(u)\geqslant 0$ 那部分，那么 $dz(u)\in\mathrm{co}\{0,u\}$，即 $dz(u)=\delta u$，其中 $\delta=\delta(u)$，因此 $dz(u)=\delta u$ 是非线性函数。

(3) 进一步，如果 $u\in\mathbb{R}^n$，定义

$$dz(u)=\begin{cases}dz(u_1),\\ dz(u_2),\\ \vdots\\ dz(u_m),\end{cases}$$

当只考虑 $dz(u_i)\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m$ 那部分，那么 $dz(y)\in\mathrm{co}\{D_\eta u, D_\eta\in\Delta\}$，其中的 Δ 和 D_η 由本节开头所定义。

2. 考虑控制系统 $\dot{x}=Ax+Bu$，采用死区非线性控制 $u=dz(Kx)$。试用本节练习 1 的方式将这个控制问题转化成线性微分包含问题来求解，并得出与引理 4.4.1 相应的结论。

3. 证明当定理 4.4.1 的条件成立时，$x=0$ 是 $L_P(\rho)$ 中唯一的不变集。

4. 如果定理 4.4.1 的条件(2)成立，那么求最大的 ρ，使得 $L_P(\rho)\subset L_H$，称为求 L_H 中最大不变集问题。应用 Schur 补定理，给出求 L_H 中最大不变集的矩阵不等式方法。

5. 设 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}$，$F=[-2\quad -1]$；$P=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 0.5\end{bmatrix}$，$H=[0.4\quad -1]$。

试求最大的 ρ(这时 $\sigma(Fx)=\sigma(-2x_1-x_2)$)。

6. 设 $A=\begin{bmatrix}0.6 & -0.8\\ 0.8 & 0.6\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}$，$T=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix}$；如取 $P=\begin{bmatrix}0.0752 & -0.0566\\ -0.0566 & 0.1331\end{bmatrix}$，$F=[-0.1125\quad -0.2987]$，验证定理 4.4.3 成立。

7. 试证明推论 4.4.3 和推论 4.4.4。

8. 试证明定理 4.4.5 和推论 4.4.5。

9. 设 $A=\begin{bmatrix}0 & -0.5\\ 1 & 1.5\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$，分别采用 $F_1=[0.9471\quad 1.6000]$，$F_2=[-0.1600\quad 1.6000]$ 作为饱和控制增益，系统是稳定的。这时分别可以有

$$P_1=\begin{bmatrix}1.6245 & -1.5364\\ -1.5364 & 15.3639\end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix}5.9393 & -0.2561\\ -0.2561 & 2.5601\end{bmatrix}$$

试求出 $Q(\gamma^*)$ 和 $F(\gamma^*)$。

第5章

Luré 型微分包含系统

上一章讨论一类线性多胞体微分包含系统及其控制问题，这类微分包含都可以看成是线性系统通过凸组合的形式推广到集合值映射的。这一章要讨论 Luré 型微分包含及其控制，它是另一类在线性系统基础上发展起来的微分包含系统，与线性多胞体系统不同的是，它本质上是非线性系统。

5.1 Luré 系统

为了以后叙述方便，本节先介绍 Luré 系统的经典理论。在 20 世纪 50 年代，这类非线性

系统曾得到很多研究，而线性系统的正实性理论是 20 世纪 60 年代的重要成果。

5.1.1 Luré 系统和超稳定性

考虑一类非线性控制系统，它的具有闭环结构，如图 5.1 所描述，环内的线性部分和非线性部分可以分离，而且非线性部分集中在反馈通道上。在经典非线性控制理论中，例如描述函数方法，一般都假设系统线性部分和非线性部分是可以分离的。对于不具备这种结构的系统，很多研究集中在如何将系统转化为这种情形。

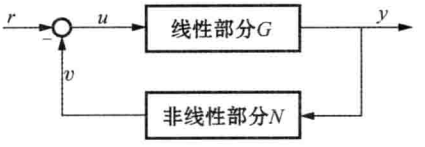


图 5.1 一类非线性控制系统

设线性部分 G 的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t)。 \end{cases} \tag{5.1.1}$$

除了 $Du(t)$ 之外，式(5.1.1)中记号的意义都与式(4.1.1)的相同，$Du(t)$ 称为直接传输项。式(5.1.1)可以看成式(4.1.1)与静态系统 $Du(t)$ 的并联。线性系统(5.1.1)的传递函数矩阵是

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D。 \tag{5.1.2}$$

如果 $D=0$，那么 $G(s)$ 是一个严格真的传递函数矩阵，这时称 $G(s)$ 是严格正则的；当 $D\neq 0$ 时，$G(s)$ 中一定含有分子次数与分母次数相等的元素，这时称 $G(s)$ 是正则的。

非线性部分 N 的输出 v 可以表示为

$$v(t) = v(t, y, \tau)。 \tag{5.1.3}$$

非线性部分是一个静态过程。在 $v(t,y,\tau)$ 中，线性部分的输出 y 是它的输入；t 是时间，$\tau>0$ 为延迟时间，它们的出现标志从 $y(t)$ 到 $v(t)$ 可以是时变的和存在延迟的。本章还要讨论 $v(t,y,\tau)$ 是集合值映射的情形。如果不是特别指出总假设 $v(t,y,\tau)$ 是连续的，并假设 $v(t)$ 和 $y(t)$ 具有相同的维数，于是 $u(t)$ 和 $y(t)$ 的维数也是相同的，即 $r=m$。

如果对任意有限的 t，非线性部分的输出 $v(t)$ 和输入 $y(t)$ 之间成立

$$\int_{t_0}^{t} v^{\mathrm{T}}(\tau) y(\tau) \mathrm{d}\tau \geqslant -r_0^2, \tag{5.1.4}$$

其中 $r_0\neq 0$ 是不依赖时间 t 常数，但可能与系统的初始状态有关，那么称 $v(t)$ 和 $y(t)$ 满足 Popov 条件，或者称非线性部分 N 满足 Popov 条件。一般称式(5.1.4)为 **Popov 积分不等式**。

在式(5.1.4)中，并不要求当 $t\to\infty$ 时左面的积分收敛，但是如果该积分收敛或者趋向正无穷大，那么式(5.1.4)必定满足。

定义 5.1.1　考虑图 5.1 描述的控制系统。设 $r(t)=0$，$v(t)$ 和 $y(t)$ 之间满足 Popov 积分不等式(5.1.4)，如存在常数 K，使得对任意的初始时间 t_0 和初始状态 x_0，都成立

$$\| x(t,x_0,t_0) \| \leqslant K(\| x_0 \| + r_0), \tag{5.1.5}$$

则称系统是**超稳定系统**，其中，$x(t,x_0,t_0)$ 是当初始状态为 x_0、初始时间 t_0 的线性系统(5.1.1)中的状态变量。如果进一步有 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t,x_0,t_0)=0$，则称它是**超渐近稳定系统**①。 □

定义 5.1.1 给出的超稳定是对整个系统而言的，其中“稳定”是依靠状态来判别的，而“超”字是针对反馈通道上的非线性部分 N 的。它是指结论超脱了函数 $v(t,y,\tau)$ 的具体形式，即不需要知道非线性部分的输出 $v(t)$ 的具体解析表示。只要在 Popov 积分不等式条件下，式(5.1.5)能成立。

Popov 最初考虑的是单变量系统，积分不等式是从下列的角状区域演变而来的。

$$0 \leqslant k_1 y^2 \leqslant yv(t,y,\tau) \leqslant k_2 y^2, \quad 0 \leqslant k_1 < k_2。 \tag{5.1.6}$$

式(5.1.6)意味在 v-y 平面内，$v=v(t,y,\tau)$ 的图像在第一和/或第三像限的一个扇形区域内。式(5.1.6)显然蕴含式(5.1.4)。Popov 最初考虑当式(5.1.6)成立的时候，图 5.1 所示的系统稳定。为了区分积分不等式，常将式(5.1.6)称为 Popov 不等式，将满足式(5.1.6)时的稳定性称作绝对稳定性。不过本书对这两种稳定性不加区分，笼统地称之为超稳定性。

由图 5.1，$u(t)=r(t)-v(t)$，于是式(5.1.1)和式(5.1.3)可以合并表述为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) - Bv(t) + Br(t), \\ v(t) = v(t,y,\tau), \\ y(t) = Cx(t) - Dv(t) + Dr(t), \end{cases} \tag{5.1.7}$$

其中 $v(t)$ 和 $y(t)$ 满足 Popov 积分不等式(5.1.6)。系统(5.1.7)称为 **Luré 系统**，可以认为它是一个线性系统采用了非线性反馈生成的，并且非线性反馈满足 Popov(积分)不等式。

如果 $v(t,y,\tau)$ 是一个集合值映射，则式(5.1.7)就写成

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) - B\omega(t) + Br(t), \\ \omega(t) \in v(t,y,\tau), \\ y(t) = Cx(t) - D\omega(t) + Dr(t)。 \end{cases} \tag{5.1.8}$$

称系统(5.1.8)为 **Luré 型微分包含系统**。

定理 5.1.1　设线性系统(5.1.1)是能控又能观的。如果当 $r(t)\equiv 0$ 时，Luré 系统(5.1.7)是超稳定的，那么 A 没有开的右半平面的特征值，并且在虚轴上的特征值是一重的；如果当 $r(t)\equiv 0$，系统(5.1.7)是超渐近稳定的，那么 A 是 Hurwitz 矩阵。

证明：当 $r(t)\equiv 0$ 时，式(5.1.4)等价于

$$\int_{t_0}^{t} u^{\mathrm{T}}(\tau) y(\tau) \mathrm{d}\tau \leqslant r_0^2。$$

① 如果 $t_0 \neq 0$，那么在线性部分式(5.1.1)中的初始时刻也取成 t_0。

取 $u(t)\equiv 0$，而 $x(0)=x_0\neq 0$，这时上式总成立。然而系统的状态为零输入响应 $x(t)=\mathrm{e}^{At}x_0$。如果 A 存在正实部的特征值 $\sigma+\mathrm{j}\omega$，其中 $\sigma>0$，那么总可以找到在 x_0，使得 $x(t)=\mathrm{e}^{At}x_0$ 中具有形为 $c\,\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}$ 的项，其中的 c 是非零向量，则 $\|x(t)\|\to\infty$，系统不会是超稳定的。如果存在重极点 $\mathrm{i}\omega$，那么总可以找到在 x_0，使得 $x(t)=\mathrm{e}^{At}x_0$ 具有形为 $c(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 的项，其中 $c(t)$ 是 t 的非零次多项式，那么依然成立 $\|x(t)\|\to\infty$。

对于超渐近稳定的结论可以类似地证得。从略。 □

定理 5.1.1 说明系统式(5.1.7)的超(渐近)稳定的和线性部分式(5.1.1)(渐近)稳定的必要条件相同。

5.1.2 正实性和正实性引理

在超稳定性理论中，正实性有着重要的作用。本小节介绍正实性，其详细叙述可以参阅相应的自适应控制系统或者非线性控制系统的教材。[14,15]

考虑函数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，其中$\mathbb{C}$是复数集。$f$ 称为实函数，如果 $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$，即 f 将实数映射到实数。记 $s=\sigma+\mathrm{i}\omega\in\mathbb{C}$ 为一个复数，其中 $\mathrm{i}^2=-1$ 为虚数单位，那么可以将 $f(s)$写成 $f(s)=\mathrm{Re}f(s)+\mathrm{iIm}f(s)$，其中 $\mathrm{Re}f(s)$和 $\mathrm{Im}f(s)$分别称是 $f(s)$的实部和虚部，且对任意的 $s\in\mathbb{C}$，它们都是实数。对实函数 f 成立 $f(\bar{s})=\mathrm{Re}f(s)-\mathrm{iIm}f(s)$，其中 $\bar{s}$ 是 s 的共轭复数，$\bar{s}=\sigma-\mathrm{i}\omega$。

定义 5.1.2 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 称为是**正实函数**，如果(1) f 是实函数；(2)当 $\sigma>0$ 时，$\mathrm{Re}f(s)\geqslant 0$。

如果(3)存在 $\lambda>0$，当 $\sigma\geqslant-\lambda$ 时，$\mathrm{Re}f(s)\geqslant 0$，则称 f 是一个**严格正实函数**。 □

粗略地讲，一个正实函数就是将复平面上的实轴映射到实轴，将右半复平面映射到的右半复平面。

根据定义容易看出：如果 $f_1(s)$和 $f_2(s)$是两个正实函数，那么 $f_1(s)+f_2(s)$和 $f_1(f_2(s))$也是正实的，当 a 是正数时，$af_1(s)$也是正实的；另外只要$[f_1(s)]^{-1}$有意义，那么$[f_1(s)]^{-1}$也是正实的。但是一般来讲 $f_1(s)f_2(s)$未必是正实的。下面两个定理刻画了正实函数和严格正实函数的特征，它们可以用复变函数知识来证明，本书略去。

定理 5.1.2 实函数 $f(s)$是正实的充分必要条件是下面三条同时满足：

(1) 如果 $s=\sigma+\mathrm{i}\omega$ 是 $f(s)$的极点，则 $\sigma\leqslant 0$；

(2) 如果 $s=\mathrm{i}\omega$ 是 $f(s)$的极点，则它是单重的，并且留数为正数②；

(3) 如果 $s=\mathrm{i}\omega$ 不是 $f(s)$的极点，则 $\mathrm{Re}f(\mathrm{i}\omega)>0$。 □

定理 5.1.3 实函数 $f(s)$是严格正实的充分必要条件是下面两条同时满足：

② 留数是复变函数中的一个基本概念。设 s_0 是 $f(s)$在闭围线 C 内的孤立极点，那么 $\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C f(s)\mathrm{d}s$ 称为 $f(s)$在 s_0 的留数，记成$\operatorname{res}_{s_0}f(s)$。留数的值与闭围线 C 的具体形状无关，而由极点的重数确定。设 s_0 是 r 重极点，那么$\operatorname{res}_{s_0}f(s)=\frac{1}{(r-1)!}\lim_{s\to s_0}\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}s^{r-1}}(s-s_0)^r f(s)$。

(1) 如果 $s=\sigma+\mathrm{i}\omega$ 是 $f(s)$的极点，则 $\sigma<0$；

(2) 对任意的 $s=\mathrm{i}\omega$，$\mathrm{Re}f(\mathrm{i}\omega)>0$。 □

定理 5.1.2 的第一个条件是说 $f(s)$在开的右半复平面没有极点，即 $f(s)$在开的右半复平面解析。如果 $f(s)$是正实的，那么$[f(s)]^{-1}$也是正实的，因此 $f(s)$在开的右半复平面也没有零点，所以一个正实函数在开的右半复平面没有零极点。同理可得，一个严格正实函数在闭的右半复平面没有零极点。

将上述讨论应用到实有理函数 $f(s)=\dfrac{n(s)}{d(s)}$，可以得到 $f(s)$的进一步特征。

定理 5.1.4　如果实有理函数 $f(s)=\dfrac{n(s)}{d(s)}$是正实的，那么$|\deg n(s)-\deg d(s)|\leqslant 1$。

证明：不妨设 $m=\deg n(s)\geqslant \deg d(s)=n$，那么用带余除法得到

$$f(s)=\frac{n(s)}{d(s)}=p_0 s^{m-n}+p_1 s^{m-n-1}+\cdots+\frac{\bar{n}(s)}{d(s)},$$

因此 $\mathrm{i}\infty$是 $f(s)$的 $m-n$ 重极点，根据定理 5.1.2 中(2)，虚轴上的极点最多是一重的，因此 $1\geqslant m-n\geqslant 0$。如果 $m\leqslant n$，那么讨论$[f(s)]^{-1}$，同理可得 $0\leqslant n-m\leqslant 1$。结论获证。 □

定理 5.1.5　如果实有理函数 $f(s)=\dfrac{n(s)}{d(s)}$是严格正实的，那么 $n(s)$、$d(s)$和 $n(s)+d(s)$都是 Hurwitz 多项式。

证明：将定理 5.1.3 的(1)用于 $f(s)$，$[f(s)]^{-1}$和 $1+f(s)$，结论立得。 □

下面将正实性概念推广到矩阵。

设 $F(s):\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{m\times m}$，即对每个 $s\in\mathbb{C}$，$F(s)$是一个 $m\times m$ 复数矩阵。$F(s)$称为实矩阵，如果 $F(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}^{m\times m}$。

定义 5.1.3　$F(s)$是实矩阵，如果对所有满足 $\mathrm{Re}s>0$ 的复数 s 都成立

$$F(s)+F^{*}(s)\geqslant 0, \tag{5.1.9}$$

则称 $F(s)$是**正实矩阵**，其中 $F^{*}(s)$是 $F(s)$的共轭转置矩阵。

如果存在 $\lambda>0$，使得对所有的 $\mathrm{Re}s>-\lambda$，都成立

$$F(s)+F^{*}(s)\geqslant 0,$$

则称 $F(s)$是**严格正实矩阵**。 □

在矩阵理论中，如果矩阵 $H(s)$对一切复数 s 成立 $H(s)=H^{*}(s)$，则称 $H(s)$是 Hermite 矩阵。Hermite 矩阵是实数域中对称矩阵在复数域中的推广，它的一个重要特征是其特征值都是实数。由于 $H^{*}(s)=H^{\mathrm{T}}(\bar{s})$，因此 $F(s)+F^{*}(s)$有时也写成 $F(s)+F^{\mathrm{T}}(\bar{s})$，为了简单，甚至简化成 $\mathrm{He}F(s)$。

下面的结论是定理 5.1.2 和定理 5.1.3 在矩阵场合的推广，其证明也略去。

定理 5.1.6　实函数矩阵 $F(s)$是正实的充分必要条件是下面三条同时满足：

(1) $F(s)$的所有元素都在开的右半复平面解析；

(2) 如果 $s=\mathrm{i}\omega$ 是 $F(s)$某个元素的极点，则它是单重的，并且矩阵

$$\operatorname*{res}_{s=j\omega} F(s)+\operatorname*{res}_{s=j\omega} F^*(s)\geqslant 0^{③};$$

(3) 如果 $s=i\omega$ 不是 $F(s)$的极点，则 $F(i\omega)+F^*(i\omega)\geqslant 0$。 □

定理 5.1.7 实函数 $F(s)$是严格正实的充分必要条件是下面两条同时满足：

(1) $F(s)$的所有元素都在闭的右半复平面解析；

(2) 对任意的 $s=i\omega$，$F(i\omega)+F^*(i\omega)>0$。 □

定理 5.1.3 和定理 5.1.4 都可以推广到有理函数矩阵，为了不偏离本书的主题，我们将这些推广留在练习中，以后要用到这些结论。

现在回到线性控制系统(5.1.1)。

称线性系统(5.1.1)是正实的或严格正实的是指其传递函数矩阵 $G(s)$是正实的或严格正实的。如果不是特别说明，本章总假设系统(5.1.1)是能控又能观的，那么传递函数 $G(s)$的分母的次数等于状态空间的维数 n。

定理 5.1.8 设线性系统式(5.1.1)是能控又能观的，那么它是正实的充分必要条件是存在维数适当的正定矩阵 P 和实数矩阵 K 和 L，使得

$$PA+A^{\mathrm{T}}P=-LL^{\mathrm{T}}, \tag{5.1.10}$$

$$K^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}P=C, \tag{5.1.11}$$

$$K^{\mathrm{T}}K=D+D^{\mathrm{T}}。 \tag{5.1.12}$$ □

定理 5.1.8 是 B. D. O Anderson 在 1967 年首先证明的，一般称为正实性引理[16]。如果 $D=0$，那么 $K=0$，式(5.1.11)就成为 $B^{\mathrm{T}}P=C$。这是我们用得最多的形式。下面的推论给出系统(5.5.1)(注意其中不含 D，或者说 $D=0$)是正实的必要条件。

推论 5.1.1 如果系统(5.1.1)中 $D=0$，且它是能控又能观的和正实的，那么 CB 是正定的。

证明：由于 $B^{\mathrm{T}}P=C$，就是 $B^{\mathrm{T}}PB=CB$，因此 CB 是对称的和半正定的。剩下只要证明CB是满秩的。如果 $\operatorname{rank}(CB)<m$，就是存在 $u\neq 0$，使得 $CBu=0$，那么用 $B^{\mathrm{T}}P=C$ 代入得 $u^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}PBu=0$。但是由于 B 是列满秩的，因此 $Bu\neq 0$，这样 $u^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}PBu>0$。矛盾。 □

在反馈正实化的讨论中，推论 5.1.1 有着重要的应用。

如果将式(5.1.10)改成 $PA+A^{\mathrm{T}}P=-LL^{\mathrm{T}}-Q$，其中 Q 是正定矩阵，那么它和式(5.1.11)和式(5.1.12)一起构成严格正实的充分条件。

定理 5.1.8 有一些变化的形式，我们将它放在习题中，这些结论都可以用定理 5.1.8 获证。

5.1.3 超稳定性判据

在这一小节中，我们要证明对于图 5.1 给出的系统，系统的超稳定性和正实性等价。在证

③ 如果 $s=i\omega$ 是 $G(s)$一个元素 $g_{ij}(s)$的极点，那么就用$\operatorname*{res}_{s_0} g_{ij}(s)$代替 $g_{ij}(s)$，这样得到的矩阵称为 $G(s)$留数矩阵并记成$\operatorname*{res}_{s_0} G(s)$。

明过程中需要用到关于 Laplace 变换的一个结论。

设 $f(t),t\in[0,\infty)$是一个实函数，如果存在 $\sigma>0$，当 $\mathrm{Re}\ s\geqslant\sigma$ 时积分 $\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 存在，那么这个积分就称为是函数 $f(t)$的 Laplace 变换，记成 $F(s)$。常将 t 称为时间域变量，s 称为频率域变量；将 $F(s)$称作像函数，而将 $f(t)$称为原函数。已知 $F(s)$求 $f(t)$的运算称为 Laplace 反变换，求 Laplace 反变换有所谓的反演公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}\omega。$$

该公式在 $f(t)$的所有连续点成立，而且其中的 σ 可以换成任意的满足 $a\leqslant\sigma$ 的实数 a。如果 $F(s)$在 $s\to\infty$时存在，那么应用留数概念，立即可以得到

$$f(t)=\sum_k\mathrm{Res}\,F(p_k)\mathrm{e}^{p_kt},\tag{5.1.13}$$

其中 $p_k,k=1,2,\cdots$是 $F(s)$的所有极点。

定理 5.1.9　考虑图 5.1 所示的系统，假设其非线性部分满足 Popov 积分不等式(5.1.4)，那么闭环系统是超稳定的充分必要条件是其线性部分(5.1.1)是正实的，或者等价地说，传递函数矩阵(5.1.2)是正实的。

证明：充分性。应用定理 5.1.8 中的矩阵 P 构造正定函数 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$，考虑 $V(x)$沿着闭环系统(5.1.7)轨线的导数，其中取 $r(t)\equiv0$，得到

$$\begin{aligned}\dot V(x)&=(Ax-B\nu)^{\mathrm{T}}Px+x^{\mathrm{T}}P(Ax-B\nu)\\&=x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P+PA)x-\nu^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Px-x^{\mathrm{T}}PB\nu\\&=-x^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}Lx-2\nu^{\mathrm{T}}(C-K^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}})x\\&=-x^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}Lx+2\nu^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}x-\nu^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}K\nu-2\nu^{\mathrm{T}}Cx+\nu^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}K\nu\\&=-\parallel Lx-K\nu\parallel^2-\nu^{\mathrm{T}}Cx-x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\nu+\nu^{\mathrm{T}}D\nu+\nu^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}\nu\\&=-\parallel Lx-K\nu\parallel^2-2\nu^{\mathrm{T}}y\\&\leqslant-2\nu^{\mathrm{T}}y。\end{aligned}$$

对上式两边积分，得到

$$\int_0^t\dot V\mathrm{d}\tau=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)-x^{\mathrm{T}}(0)Px(0)\leqslant-2\int_0^t\nu^{\mathrm{T}}(\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant2r_0^2。$$

分别用 λ_{M} 和 λ_{m} 表示 P 的最大特征值和最小特征值，由上述不等式得到

$$\lambda_{\mathrm{m}}\parallel x(t)\parallel^2\leqslant\lambda_{\mathrm{M}}\parallel x(0)\parallel^2+2r_0^2\leqslant K(\parallel x(0)\parallel^2+r_0^2)\leqslant K(\parallel x(0)\parallel+r_0)^2,$$

其中 $K=\max\{\lambda_{\mathrm{M}},2\}$。由此已经不难得到式(5.1.5)。

必要性是根据定义 5.1.2 来证明的。由定理 5.1.2，$G(s)$在开的右半复平面解析。

如果存在 $\sigma_0+\mathrm{i}\omega_0$，其中 $\sigma_0>0$，使得 $G(\sigma_0+\mathrm{i}\omega_0)+G^*(\sigma_0+\mathrm{i}\omega_0)$不是半正定的，即存在 $u_0\in\mathbb{C}^m$，其中$\mathbb{C}$ 为复数域，$\parallel u_0\parallel=1$，并且

$$u_0^*[G(\sigma_0+\mathrm{i}\omega_0)+G^*(\sigma_0+\mathrm{i}\omega_0)]u_0<0。$$

考虑输入 $u(t)=\mathrm{Re}\ u_0 e^{(\sigma_0+i\omega_0)t}$，因为 $G(s)$ 表示的系统是渐近稳定的，根据式(5.1.13)得到

$$y(t)=\mathrm{Re}\ G(\sigma_0+i\omega_0)u_0 e^{(\sigma_0+i\omega_0)t}。\tag{5.1.14}$$

考察 $u^{\mathrm{T}}(t)y(t)=\mathrm{Re}\ u_0^{\mathrm{T}}e^{(\sigma_0+i\omega_0)t}\ \mathrm{Re}\ G(\sigma_0+i\omega_0)u_0 e^{(\sigma_0+i\omega_0)t}$，可以经过精细的讨论证明 $\int_0^t u^{\mathrm{T}}(\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau\to\infty$，因此 Popov 积分不等式(5.1.4)成立。

但是 $Cx(t)=y(t)-Du(t)=\mathrm{Re}\ C(\sigma_0+i\omega_0-A)^{-1}Bu_0 e^{(\sigma_0+i\omega_0)t}$，所以 $\sup\|x(t)\|\to\infty$。这与超稳定矛盾。□

平行于定理 5.1.9，我们可以用类似的方法建立下面的结论，详细过程从略。

定理 5.1.10 考虑图 5.1 所示的系统，假设其非线性部分满足 Popov 积分不等式(5.1.4)，那么闭环系统是超渐近稳定的充分必要条件是其线性部分(5.1.1)是严格正实的，或者等价地说，传递函数矩阵(5.1.2)是严格正实的。□

练习

1. 设线性系统(5.5.1)是能控又能观的，它是正实的充分必要条件是存在维数适当的正定矩阵 P 和半正定矩阵 Q 和 R，以及矩阵 S，使得

$$PA+A^{\mathrm{T}}P=-Q,$$
$$B^{\mathrm{T}}P+S^{\mathrm{T}}=C,$$
$$D+D^{\mathrm{T}}=R,$$

以及

$$\begin{bmatrix}Q & S\\ S^{\mathrm{T}} & R\end{bmatrix}\geqslant 0。$$

2. 设线性系统(5.5.1)是能控又能观的，它是严格正实的充分必要条件是存在维数适当的正定矩阵 P，Q 和 R，以及矩阵 S，使得

$$PA+A^{\mathrm{T}}P=-Q,$$
$$B^{\mathrm{T}}P+S^{\mathrm{T}}=C,$$
$$D+D^{\mathrm{T}}=R,$$

以及

$$\begin{bmatrix}Q & S\\ S^{\mathrm{T}} & R\end{bmatrix}>0。$$

3. 证明定理 3.1.9。

4. 设 $W(s)$ 是一个 $n\times n$ 的有理函数矩阵，$W(s)=N(s)D^{-1}(s)$ 是它的一个右互质分解，并且对任意的 $s\in C$，$\mathrm{rank}[D(s)N(s)]=n$。那么成立：

(1) $W(s)$ 是正实的充分必要条件是 $D^*(s)N(s)+N^*(s)D(s)$ 正定的。

(2) 如果 $\mathrm{rank}W(s)=n$ 对一切 $\mathrm{Re}s>0$ 成立，那么 $W(s)$ 是正实的充分必要条件是 $W^{-1}(s)$

是正实的。

(3) 如果 $W(s)$是正实的，那么 $\det N(s)$和 $\det D(s)$都是 Hurwitz 多项式。

(4) 如果 $W(s)$是正实的，那么 $N(s)[D(s)+\alpha N(s)]^{-1}$，$[N(s)+\alpha D(s)]D^{-1}(s)$都是正实的，其中的 α 是正实数。

(5) 如果 $D(s)$是列正则的，分别用 α_i 和 β_i 表示 $N(s)$和 $D(s)$的第 i 列的列次，那么 $|\alpha_i-\beta_i|\leqslant 1$。

对左互质分解可以有相似的结论。

5. 试证明定理 5.1.10。

5.2 Luré 型微分包含系统的镇定

上一节讨论了 Luré 系统，本节的目的是将结果推广到 Luré 型微分包含系统。

5.2.1 Luré 型微分包含系统的实际例子

在外力作用下物体会产生运动，运动过程中必然地受到摩擦力的作用。2.3 节的第一小节中指出，摩擦是一个比较复杂的过程，其中决定摩擦力大小的摩擦系数与物体的速度存在非线性关系，如果将静摩擦也考虑在内，那么摩擦力最好用集合值映射来描述。21 世纪初，J. C. A. de Bruin 等设计了一个柔性连接系统的试验装置，[4]输入是支流电压，驱使上端的直流马达(DC motor)转动。直流马达通过齿轮带动上端转盘(upper disc)。上端转盘通过一根柔性钢缆与执行端转盘(lower disc)连接。在柔性钢缆的尾部安装了油封以使各类摩擦更显著。同时用计算机来记录执行端转盘的角速度。图 5.2 是他们当时采用的实验装置的照片。

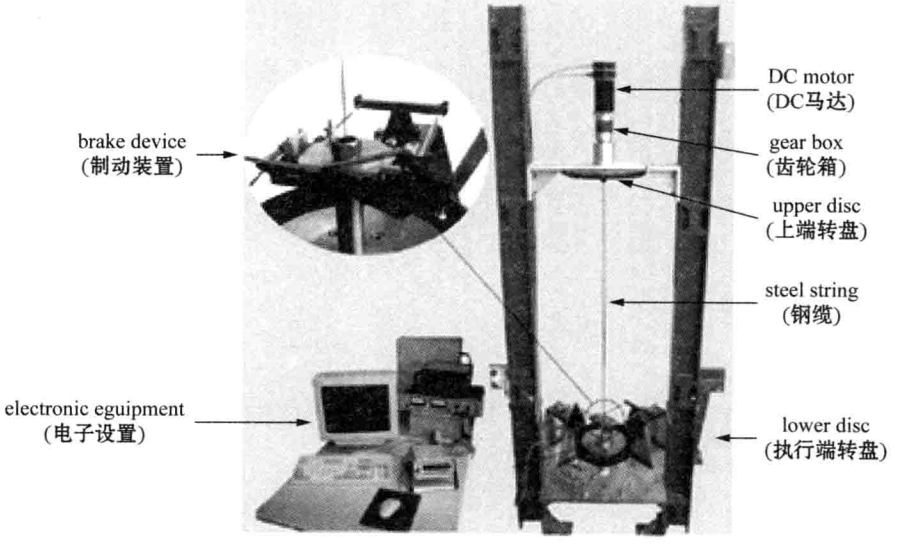


图 5.2 柔性转动的实验装置

由于现场测试转速比较容易获得，而力矩相对困难量测，在图 5.3 中，将角速度作为自变量，力矩就成为集合值映射。根据力矩平衡容易得到：

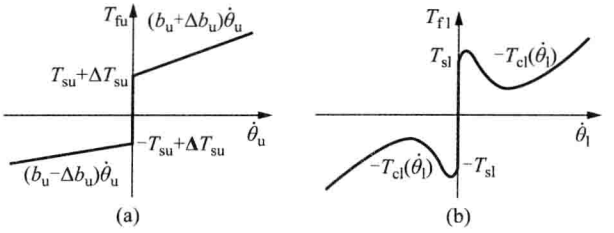


图 5.3　试验装置中力矩与角速度间的死区非线性

(a) 上端转盘；(b) 下端转盘

$$\begin{aligned} J_u\ddot{\theta}_u + k_\theta(\theta_u-\theta_l) + b(\dot{\theta}_u-\dot{\theta}_l) + T_{fu}(\dot{\theta}_u) - k_m u = 0,\\ J_l\ddot{\theta}_l - k_\theta(\theta_u-\theta_l) - b(\dot{\theta}_u-\dot{\theta}_l) + T_{fl}(\dot{\theta}_l) = 0, \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

其中下标的力矩 u 代表上方转盘，l 代表下方转盘；J 是转动惯量，$k_\theta(\theta_u-\theta_l)+b(\dot{\theta}_u-\dot{\theta}_l)$表示扭曲产生的力矩，$\theta$ 是角位移。阻力矩 T_f 的计算分别为

$$T_{fu}(\dot{\theta}_u) \in \begin{cases} T_{cu}(\dot{\theta}_u)\mathrm{sgn}(\dot{\theta}_u), & \dot{\theta}_u \neq 0,\\ [-T_{su}+\Delta T_{su}, T_{su}+\Delta T_{su}], & \dot{\theta}_u = 0, \end{cases}$$

$$T_{fl}(\dot{\theta}_l) \in \begin{cases} T_{cl}(\dot{\theta}_l)\mathrm{sgn}(\dot{\theta}_l), & \dot{\theta}_l \neq 0,\\ [-T_{sl}, T_{sl}], & \dot{\theta}_l = 0, \end{cases}$$

其中 $T_{cu}(\dot{\theta}_u)$和 $T_{cl}(\dot{\theta}_u)$是非线性项。在设状态变量为 $x=[\theta_u-\theta_l \quad \dot{\theta}_u \quad \dot{\theta}_l]^T$ 之后，(5.2.1)就可以写成

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + G\omega(t) + Bu(t),\\ z(t) = Hx(t),\\ y(t) = Cx(t),\\ \omega(t) \in -\varphi(z)。 \end{cases}$$

这里的其他记号意义都可以由式(5.2.1)直接推得，而 $z=[\dot{\theta}_u \quad \dot{\theta}_l]^T$，$\omega=[T_{fu}(z_1) \quad T_{fl}(z_2)]^T$。上式就是一个 Luré 型微分包含系统。

他们的实验表明，这个模型可以很好地描述这个装置的运行情况。

5.2.2　Luré 型微分包含系统的镇定

继续考虑 Luré 型微分包含系统式(5.1.8)。先假设 $D=0$，对于那些可以推广到 $D\neq 0$ 的情形，我们会在文中特别指出的。为了方便将它再记于下，图 5.4 给出它的方框图，在本节以后的讨论中，方框图运算会是一个有用的工具。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) - B\omega(t) + Br(t),\\ \omega(t) \in \nu(t,y,\tau),\\ y(t) = Cx(t)。 \end{cases} \tag{5.2.2}$$

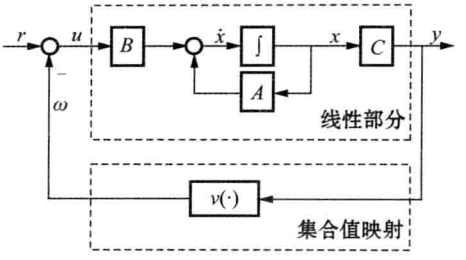


图 5.4 Luré 微分包含系统

在式(5.2.2)中总假设输入的维数等于输出的维数，即 $m=r$。假设集合值映射 $\nu(t,y,\tau)$ 关于它的输入 y 是单调的，根据 2.6 节的定义，即对任意 $y_i\in\mathbb{R}^m$，$i=1,2$，和 $\omega_i\in\nu(t,y_i,\tau)$，成立 $\langle(\omega_1\quad-\omega_2),(y_1\quad-y_2)\rangle\geqslant 0$。为了保证原点是系统的平衡点，通常假设 $0\in\nu(t,0,\tau)$，这个假设并不失一般性，因为总可以通过坐标轴的平移做到这一点。这样从集合值映射的单调性，可以得到 $\langle\omega,y\rangle\geqslant 0$，就是

$$y^{\mathrm{T}}\nu(t,y,\tau)\geqslant 0。\tag{5.2.3}$$

显然式(5.2.3)蕴含 Popov 不等式(5.1.4)成立。应用定理 5.1.8 和定理 5.1.9 立即可以得到下面的结论。证明过程略去。

定理 5.2.1 考虑微分包含系统(5.2.2)。如果系统满足：

(1) $\nu(y)$是单调的，并且 $0\in\nu(t,0,\tau)$；

(2) (C,A,B)是能控又能观的。

那么当线性部分的传递函数 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 是正实矩阵时，系统是稳定的；当 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 是严格正实矩阵时，系统是渐近稳定的。 □

这个结论对于 $D\neq 0$ 的情形也是成立的。

5.2.3 系统的零和相对阶

1) 系统的零

根据定理 5.2.1，Luré 型微分包含系统式(5.2.1)的稳定性取决于线性部分(C,A,B)的正实性或者严格正实性，因此镇定设计集中于使得线性部分为正实或严格正实。本节主要讨论输出反馈控制，即控制的手段是 $r=Ky$。利用方框图运算，它等价于 $u=Ky-\omega$。

寻找反馈律(矩阵)K，使得$(C,A+BKC,B)$是正实的或者严格正实的设计称为反馈正实化。为了讨论反馈正实化的需要，这一小节先介绍**系统零**的概念。系统零包括有限零和无限零，先讨论有限零。

设 $W(s)$是实数域上的一个 $r\times m$ 有理函数矩阵，且在有理函数域上它的秩为 $\min(r,m)$①。

① 有理矩阵的秩是定义在有理函数域上的。记 $q=\operatorname{rank}W(s)$，那么 $W(s)$中至少存在一个 $q\times q$ 子阵，它的行列式不恒等于 0，而所有 $q+1$ 阶子式均为 0。

$s_0\in\mathbb{C}$ 是一个复数，如果 $\operatorname{rank} W(s_0)<\min(r,m)$，这里的秩是定义在复数域上的，那么就称 s_0 是 $W(s)$ 的有限零，有限零常简称为零。如果系统 (C,A,B) 是 $W(s)$ 的实现，那么这个 s_0 也称是系统 (C,A,B) 的有限零。有限零具有下列性质。

(1) 设 $W(s)=N_r(s)D_r^{-1}(s)=D_l^{-1}(s)N_l(s)$ 分别是 $W(s)$ 的右互质分解和左互质分解，那么 s_0 是 $W(s)$ 的零的充分必要条件是 $\operatorname{rank}N_r(s_0)=\operatorname{rank}N_l(s_0)<\min(r,m)$。

(2) 如果 (C,A,B) 是 $W(s)$ 的最小实现，那么 s_0 是 $W(s)$ 零的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} s_0I-A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}<n+\min(r,m)。$$

(3) 如果 s_0 是 (C,A,B) 的零，那么 s_0 也是 $(CT^{-1},T(A+BF+GC)T^{-1},TB)$ 的零，其中 T,F 和 G 是维数合适的矩阵，而且 T 可逆。就是说系统零在坐标变换、状态反馈和输出嵌入下是不变的。

有限零可以定义重数。设 $W(s)$ 是 $r\times m$ 有理函数矩阵，记 $q=\min(r,m)$，做 $W(s)$ 的右互质分解 $W(s)=N_r(s)D_r^{-1}(s)$。如果 s_0 是 $W(s)$ 的有限零，那么 $s-s_0$ 是 $N_r(s)$ 所有 q 阶子式的公因子；如果 $(s-s_0)^p$ 是 $N_r(s)$ 所有 q 阶子式的公因子，而 $(s-s_0)^{p+1}$ 不是，那么称 s_0 是 $W(s)$ 的 p 重有限零。

在控制理论中称 (C,A,B) 是**最小相位系统**，如果它的零都在开的左半复平面，或者说它的零都是稳定的。

2) 系统的相对阶

无限零与系统的相对阶有关，先考虑单变量系统。

考虑有理函数 $W(s)=\dfrac{n(s)}{d(s)}$。如果 $\deg n(s)<\deg d(s)$，那么当 $s\to\infty$ 时，$\dfrac{n(s)}{d(s)}\to 0$，这意味着无穷大必然是它的零点。为了区别有限零，这样的零点称为无限零。对于无限零也可以引进重数。如果 $\deg d(s)-\deg n(s)=p>0$，那么我们称无穷大是这个有理式的 p 重无限零。无穷大的重数在根轨迹理论中有很好的解释。

无穷零的重数 p 在线性系统理论中被称作**相对阶**。它的具体意义如下。考虑单变量系统 (c^{T},A,b)，它的状态空间描述是

$$\dot{x}=Ax+bu,$$
$$y=c^{\mathrm{T}}x,$$

其中 (c^{T},A,b) 具有 Brunovsky 能控标准型：

$$c^{\mathrm{T}}=[\beta_n\ \ \beta_{n-1}\ \ \cdots\ \ \beta_1],$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}。\tag{5.2.4}$$

系统(5.2.4)的传递函数是

$$G(s)=\frac{\beta_1 s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n}。$$

当它的分子多项式和分母多项式是互质时,式(5.2.4)描述的系统必定是能观的。

如果它的相对阶是 p,就是分子的次数为 $n-p$,就是 $\beta_1=\cdots=\beta_{p-1}=0$ 而 $\beta_p\neq 0$。可以直接验证,$c^{\mathrm{T}}b=0, c^{\mathrm{T}}Ab=0,\cdots, c^{\mathrm{T}}A^{p-2}b=0, c^{\mathrm{T}}A^{p-1}b\neq 0$。也就是说对输出 y 求导数,$\dot{y}=c^{\mathrm{T}}\dot{x}=c^{\mathrm{T}}(Ax+bu)=c^{\mathrm{T}}Ax$,$\ddot{y}=c^{\mathrm{T}}A\dot{x}=c^{\mathrm{T}}A(Ax+bu)=c^{\mathrm{T}}A^2x,\cdots$,一直到 $y^{(p-1)}$ 都不会出现输入 u;在 y 的 p 次导数 $y^{(p)}$ 的表达式 $y^{(p)}=c^{\mathrm{T}}A^px+c^{\mathrm{T}}A^{p-1}bu$ 中,会首次出现输入 u。

容易看出 p 是系统相对阶的充分必要条件是:$\lim\limits_{s\to\infty}s^{p-1}G(s)=0$;$\lim\limits_{s\to\infty}s^pG(s)\neq 0$。因此尽管上面是借助于能控标准型式(5.2.4)来说明"直到 y 的 p 次导数 $y^{(p)}$ 才首次出现输入 u"这个事实,但是实际上它并不依赖状态方程的具体形式。

现在将相对阶的概念推广到有理矩阵。设 $W(s)$ 是一个 $r\times m$ 的有理函数矩阵,将 $W(s)$ 按行写成

$$W(s)=\begin{bmatrix} w_1^{\mathrm{T}}(s)\\ w_2^{\mathrm{T}}(s)\\ \vdots\\ w_r^{\mathrm{T}}(s)\end{bmatrix},$$

对 $i=1,2,\cdots,r$,$w_i^{\mathrm{T}}(s)$ 都是 m 维的行向量,其元素都是有理分式。

如果 $\lim\limits_{s\to\infty}s^jw_i^{\mathrm{T}}(s)=0$,$j=0,1,2,\cdots,p_i-1$;$\lim\limits_{s\to\infty}s^{p_i}w_i^{\mathrm{T}}(s)\neq 0$,而且至少存在一个 $s\in\mathbb{C}$,使得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lim\limits_{s\to\infty}s^{p_1}w_1^{\mathrm{T}}(s)\\ \lim\limits_{s\to\infty}s^{p_2}w_2^{\mathrm{T}}(s)\\ \vdots\\ \lim\limits_{s\to\infty}s^{p_r}w_r^{\mathrm{T}}(s)\end{bmatrix}=\min(r,m)$$

那么就称 $W(s)$ 的第 i 个相对阶是 p_i,称 $\{p_1,p_2,\cdots,p_r\}$ 是 $W(s)$ 的相对阶集,称 $p=\min\{p_1,p_2,\cdots,p_r\}$ 是 $W(s)$ 的相对阶。

考虑多变量系统(C,A,B),它的状态空间描述是

$$\dot{x}=Ax+Bu,$$
$$y=Cx,$$

假设 $m=r$。记 C 的第 i 行是 c_i^{T},那么系统的传递函数矩阵按行写就是

$$G(s)=\begin{bmatrix}c_1^{\mathrm{T}}(sI-A)^{-1}B\\ c_2^{\mathrm{T}}(sI-A)^{-1}B\\ \vdots\\ c_r^{\mathrm{T}}(sI-A)^{-1}B\end{bmatrix}。$$

如果$\{p_1,p_2,\cdots,p_r\}$是$G(s)$的相对阶集，那么$\dot{y}_i,\cdots,y_i^{(p_i-1)}$中都不会出现输入$u$，而$y_i^{(p_i)}$必然出现输入$u$，并且记

$$\Pi=\begin{bmatrix}c_1^{\mathrm{T}}A^{p_1}B\\ c_2^{\mathrm{T}}A^{p_2}B\\ \vdots\\ c_r^{\mathrm{T}}A^{p_r}B\end{bmatrix},$$

则 Π 是可逆矩阵。注意对于多变量系统，相对阶需要有 Π 可逆的要求。

系统的相对阶都是用传递函数来定义的，因此除了排列的顺序，它在坐标变换下是不变的，还可以证明，在状态反馈下它也是不变的。

考虑输入和输出维数都是 m 的系统。如果 $\det(CB)\neq 0$，那么系统的相对阶集的元素全是 1，这时可以将系统写成

$$\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & B_1\\ A_{21} & A_{22} & 0\\ C_1 & C_2 & 0\end{bmatrix},$$

其中的 B_1 是 $m\times m$ 的可逆矩阵。条件 $\det(CB)\neq 0$ 蕴含 C_1 也是 $m\times m$ 可逆矩阵。如果再做状态等价变换，变换矩阵为 $T=\begin{bmatrix}I & C_1^{-1}C_2\\ 0 & I\end{bmatrix}$，那么 $T^{-1}=\begin{bmatrix}I & -C_1^{-1}C_2\\ 0 & I\end{bmatrix}$，经过这次变换，系统就成为

$$\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & B_1\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} & 0\\ C_1 & 0 & 0\end{bmatrix},\tag{5.2.5}$$

其中的 C_1 和 B_1 还和上式一样，但是 $\overline{A}_{ij}$ 未必和 A_{ij} 一样。特别要指出的是：式(5.2.5)是根据相对阶得到的，不倚赖于能观性。以后我们会经常用到式(5.2.5)的形式。

3) Hurwitz 向量

在结束这一小节的时候，再给出一个概念。

设 $h\in\mathbb{R}^n$，$h=(h_1\quad h_2\quad\cdots\quad h_n)^{\mathrm{T}}$，$h$ 称为是 **Hurwitz 向量**，如果多项式

$$h(x)=h_1x^{n-1}+h_2x^{n-2}+\cdots+h_{n-1}x+h_n$$

是 Hurwitz 多项式。在 Hurwitz 向量中，并没有要求 $h_1\neq 0$。但是如果 $h_1\neq 0$，那么 h_i，$i=2,3,\cdots,n$ 都不能为 0，并且它们都和 h_1 同号。为了确定起见，约定 $h_1>0$。进一步如果 $h_1=h_2=\cdots=h_{i-1}=0$，$h_i\neq 0$。那么约定 $h_i>0$，并且 $h_{i+1},\cdots,h_n$ 与 h_i 同号。

关于 Hurwitz 向量我们有如下的结论。

引理 5.2.1　设 $h=(h_1\quad h_2\quad\cdots\quad h_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$ 是 Hurwitz 向量。如果 $h_1=h_2=\cdots=h_{i-1}=0$，但 $h_i\neq 0$；设 A 具有 Brunovsky 能控标准型(见式(5.2.4))，那么存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得 $\widehat{h}=(A+\lambda I)h$

是 Hurwitz 向量，并且在$\hat{h}$中，$\hat{h}_{i-1}\neq 0$。

证明：记 $h(s)=h_i s^{n-i}+h_{i+1}s^{n-i-1}+\cdots+h_{n-1}s+h_n$，直接验证可得$\hat{h}$对应的多项式是

$$\hat{h}(s)=(s+\lambda)h(s)-a_{n-i+1}h_i-a_{n-i}h_{i+1}-\cdots-a_1h_n。$$

记 $\rho=a_{n-i+1}h_i+a_{n-i}h_{i+1}+\cdots+a_1h_n$，考虑方程$\hat{h}(s)=sh(s)+\lambda h(s)-\rho=0$，并将它改写成

$$\frac{h(s)}{sh(s)-\rho}=-\frac{1}{\lambda}。$$

注意到分母是 $n-i+1$ 次多项式，而分子是 $n-i$ 次多项式。根据根轨迹理论，当 $\lambda\to\infty$时，$n-i$个根趋向$h(s)$的零点，还有一个趋向$-\infty$。已知$h(s)$是 Hurwitz 多项式，因此只要 λ 充分大，$\hat{h}(s)$的 $n-i+1$ 个根都在左半复平面。 □

引理 5.2.1 是对具有 Brunovsky 能控标准型的矩阵 A 证明的，事实上，对于一些其他形式的标准型，结论也是成立的，读者可以寻找使得结论成立的 A 的其他形式。

重复应用引理 5.2.1 可得，如果 h 是 Hurwitz 向量，$h_1=h_2=\cdots=h_{i-1}=0$，而 $h_i\neq 0$，那么总可以找到 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-i}>0$，使得$\hat{h}=(A+\lambda_{n-1}I)\cdots(A+\lambda_1 I)h$，$\hat{h}$是 Hurwitz 向量，而且它的第一个分量不是 0。

5.2.4 反馈正实化

前文已经指出，Luré 型微分包含系统(5.2.2)的镇定关键在于使得线性部分是正实的或者严格正实的。这一小节要给出反馈正实化的两个结论。先考虑单变量系统。

引理 5.2.2 考虑能控又能观的单变量系统(c^{T},A,b)，存在输出反馈 $u=ky$，使得$(c^{\mathrm{T}},A+kbc^{\mathrm{T}},b)$是严格正实的充分必要条件是：

(1) $c^{\mathrm{T}}b>0$；

(2) 系统是最小相位的。

证明：充分性。如果 $c^{\mathrm{T}}b\neq 0$，那么系统的相对阶为 1，根据式(5.2.5)，(c^{T},A,b)可以分别写成

$$c^{\mathrm{T}}=[1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0],\quad A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}b_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\tag{5.2.6}$$

其中 $A_{11}\in\mathbb{R}$，$b_1\in\mathbb{R}$，且 $b_1>0$。应用矩阵求逆公式，可以得到

$$\begin{bmatrix}sI-A_{11}&-A_{12}\\-A_{21}&sI-A_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det(sI-A)}\begin{bmatrix}\det(sI-A_{22})&**&*\end{bmatrix},$$

其中 $*$ 表示一些不需要知道具体值的向量或者矩阵。那么

$$c^{\mathrm{T}}(sI-A)^{-1}b=\frac{\det(sI-A_{22})b_1}{\det(sI-A)}。$$

引理 5.2.2 的条件(2)蕴含 $\det(sI-A_{22})$是 Hurwitz 多项式，即 A_{22}是 Hurwitz 矩阵。于是对任意一个正定矩阵 Q_{22}，存在正定矩阵 P_{22}，使得 $P_{22}A_{22}+A_{22}^{\mathrm{T}}P_{22}=-Q_{22}$。

取 $P_{11}=b_1^{-1}$，则 $P_{11}b_1=1$，再取

$$Q_{21}=Q_{12}^{\mathrm{T}}=-(P_{22}A_{21}+A_{12}^{\mathrm{T}}P_{11})。$$

那么

$$\begin{bmatrix}P_{11} & 0\\ 0 & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}+kb_1 & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_{11}+kb_1 & A_{21}^{\mathrm{T}}\\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11} & 0\\ 0 & P_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2P_{11}(A_{11}+kb_1) & P_{11}A_{12}+A_{21}^{\mathrm{T}}P_{22}\\ A_{12}^{\mathrm{T}}P_{11}+P_{22}A_{21} & P_{22}A_{22}+A_{22}^{\mathrm{T}}P_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2b_1^{-1}(A_{11}+kb_1) & -Q_{21}^{\mathrm{T}}\\ -Q_{21} & -Q_{22}\end{bmatrix}。$$

只要取常数 k 满足

$$k<-\frac{1}{2}(2b_1^{-1}A_{11}+Q_{21}^{\mathrm{T}}Q_{22}^{-1}Q_{21}),$$

则根据 Schur 补引理(引理 4.1.1)

$$\begin{bmatrix}2b_1^{-1}(A_{11}+kb_1) & -Q_{21}^{\mathrm{T}}\\ -Q_{21} & -Q_{22}\end{bmatrix}<0。$$

因此只要取 $P=\begin{bmatrix}P_{11} & 0\\ 0 & P_{22}\end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix}-2b_1^{-1}(A_{11}+kb_1) & Q_{21}^{\mathrm{T}}\\ Q_{21} & Q_{22}\end{bmatrix}$，则 P 和 Q 都是正定的，且成立

$$P(A+kbc^{\mathrm{T}})+(A+kbc^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}P=-Q,\quad Pb=c。\tag{5.2.7}$$

应用定理 5.1.8 后面的说明，$(c^{\mathrm{T}},A+kbc^{\mathrm{T}},b)$是严格正实的。

必要性。根据推论 5.1.1，$c^{\mathrm{T}}b>0$。根据定理 5.1.5，传递函数的分子是 Hurwitz 多项式，因此系统的有限零都是稳定的，即是最小相位的。 □

下面的推论是引理 5.2.2 的频域形式。

推论 5.2.1　设系统(c^{T},A,b)是能控又能观的，它的传递函数是

$$G(s)=\frac{\beta_1 s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n},$$

那么存在输出反馈 $u=ky$，使得闭环系统$(c^{\mathrm{T}},A+kbc^{\mathrm{T}},b)$是严格正则的充分必要条件是：$[\beta_1\quad \beta_{n-1}\quad \cdots\quad \beta_n]^{\mathrm{T}}$是 Hurwitz 向量，而且首项系数 $\beta_1>0$。 □

下面将引理 5.2.2 推广到多变量情形。设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，将 A 分块成

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},$$

如果 A_{22}是可逆的，那么 A 可以分解成

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & A_{12}A_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ A_{22}^{-1}A_{21} & I\end{bmatrix},$$

其中的 I 都是单位矩阵，但维数未必一样，其维数不难根据运算要求确定。利用这个分解，可以得到

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}I & 0\\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & 0\\ 0 & A_{22}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & -A_{12}A_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{bmatrix}。\tag{5.2.8}$$

定理 5.2.2 设系统 (C,A,B) 是能控又能观的，那么存在 $K\in\mathbb{R}^{m\times m}$，使得经输出反馈 $u=Ky$，$(C,A+BKC,B)$ 是严格正实的充分必要条件是：

(1) CB 是正定的；

(2) 系统是最小相位的。

证明：充分性由于 CB 是可逆的，应用式(5.2.5)，(C,A,B) 可以分别写成

$$C=[C_1\quad 0],\quad A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix},$$

其中 $C_1,A_{11},B_1\in\mathbb{R}^{m\times m}$，且 C_1,B_1 是可逆的，特别可以使 $B_1=I$，这时 C_1 是正定的，并且可以将反馈取成 $u=ky,k\in\mathbb{R}$。考察它的传递函数 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$，应用式(5.2.8)，得到

$$\begin{aligned}G(s)=&[C_1\quad 0]\begin{bmatrix}(sI-A_{22}) & -A_{12}\\ -A_{21} & (sI-A_{22})\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}\\ =&[C_1\quad 0]\begin{bmatrix}I & 0\\ (sI-A_{22})^{-1}A_{21} & I\end{bmatrix}\cdot\\ &\begin{bmatrix}[sI-A_{11}-A_{12}(sI-A_{22})^{-1}A_{21}]^{-1} & 0\\ 0 & (sI-A_{22})^{-1}\end{bmatrix}\cdot\\ &\begin{bmatrix}I & A_{12}(sI-A_{22})^{-1}\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}\\ =&C_1[sI-A_{11}-A_{12}(sI-A_{22})^{-1}A_{21}]^{-1},\end{aligned}$$

其中 I 是适当维数的单位矩阵，$\cdot$ 表示矩阵的乘法。由于 $(sI-A_{22})^{-1}=\dfrac{\mathrm{Adj}(sI-A_{22})}{\det(sI-A_{22})}$，这里的 $\mathrm{Adj}(sI-A_{22})$ 是 $(sI-A_{22})$ 的伴随矩阵，它是一个多项式矩阵，因而

$$G(s)=[C_1\det(sI-A_{22})][sI-A_{11}-A_{12}\mathrm{Adj}(sI-A_{22})A_{21}]^{-1}\tag{5.2.9}$$

是 $G(s)$ 的一个右分解。根据本节中关于有限零的注释 1，系统零都是 $\det(sI-A_{22})$ 的根，定理的条件 2 蕴含 A_{22} 是 Hurwitz 矩阵，从而对于任意的正定矩阵 $Q_{22}\in\mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$，总存在正定矩阵 P_{22} 使得 $P_{22}A_{22}+A_{22}^{\mathrm{T}}P_{22}=-Q_{22}$。

定义 $P_{11}=C_1$ 和 $Q_{21}=Q_{12}^{\mathrm{T}}=-(P_{22}A_{21}+A_{12}^{\mathrm{T}}P_{11})$。考察

$$\begin{bmatrix}P_{11} & 0\\ 0 & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}+kC_1 & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_{11}^{\mathrm{T}}+kC_1 & A_{21}^{\mathrm{T}}\\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11} & 0\\ 0 & P_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} P_{11}A_{11}+A_{11}^{\mathrm{T}}P_{11}+2kC_1^2 & P_{11}A_{12}+A_{21}^{\mathrm{T}}P_{22} \\ A_{12}^{\mathrm{T}}P_{11}+P_{22}A_{21} & P_{22}A_{22}+A_{22}^{\mathrm{T}}P_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} P_{11}A_{11}+A_{11}^{\mathrm{T}}P_{11}+2kC_1^2 & -Q_{21}^{\mathrm{T}} \\ -Q_{21} & -Q_{22} \end{bmatrix}。$$

因此只要 $P_{11}A_{11}+A_{11}^{\mathrm{T}}P_{11}+2kC_1^2-Q_{21}^{\mathrm{T}}Q_{22}^{-1}Q_{21}<0$，就有

$$\begin{bmatrix} P_{11}A_{11}+A_{11}^{\mathrm{T}}P_{11}+2kC_1^2 & -Q_{21}^{\mathrm{T}} \\ -Q_{21} & -Q_{22} \end{bmatrix}<0。$$

这是可以成立的，因为 $C_1^{-2}(Q_{21}^{\mathrm{T}}Q_{22}^{-1}Q_{21}-P_{11}A_{11}-A_{11}^{\mathrm{T}}P_{11})$ 是对称矩阵，用 $\lambda_{\min}$ 表示它的最小特征值，那么当 $k<\frac{1}{2}\lambda_{\min}$ 时，$P_{11}A_{11}+A_{11}^{\mathrm{T}}P_{11}+2kC_1^2-Q_{21}^{\mathrm{T}}Q_{22}^{-1}Q_{21}<0$ 成立，应用引理 4.1.1，这时

$$\begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}+kC_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}}+kC_1 & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}<0,$$

同时成立 $\begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_1^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix}$。根据定理 5.1.8，$(C\ A+kBC\ B)$ 是严格正实的。

必要性。如果 $(C,A+BKC,B)$ 是严格正实的，那么由推论 5.1.1，条件(1)获证。根据 5.1 节练习 4 的第 3 小题，如果对 $G_K(s)=C(sI-A-BKC)^{-1}B$ 作右互质分解，$G_K(s)=N_r(s)D_r^{-1}(s)$，那么 $\det N_r(s)$ 是 Hurwitz 多项式，即 $(C,A+BKC,B)$ 的零都是稳定的，根据系统零的性质(3)，$(C,A+BKC,B)$ 的零就是 (C,A,B) 的零，所以 (C,A,B) 是最小相位的。 □

我们将多变量情形的频域判据放在练习中，读者不妨试行推导。

5.2.5　反馈镇定——单变量系统

定理 5.2.2 给出了当相对阶集全为 1 时的镇定设计，本小节的目的是将这种设计推广到相对阶大于 1 的情形。先考虑利用对输出采用 PD 补偿来改变系统的相对阶，然后应用定理 5.2.2 完成镇定；接着考虑用状态反馈来替代 PD 补偿，为下一节的采用状态观测器的镇定奠定基础。

我们分两个小节来讨论这种镇定设计。先考虑单变量系统 (c^{T},A,b)，下一小节考虑多变量系统。

如果系统的线性部分相对阶是 2，那么它的传递函数是

$$G(s)=\frac{\beta_2 s^{n-2}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n},$$

根据推论 5.2.1，不可能存在输出反馈 $u=ky$ 使得闭环后的传递函数是严格正实的。这时考虑引进辅助输出 $z(t)=\lambda y(t)+\dot{y}(t)$，即 $z(s)=(\lambda+s)y(s)$，这等于在输出端串联了一个 PD 环节，对单变量系统而言，也等价于输入端串联了一个 PD 控制。这时从 $u(s)$ 到 $z(s)$ 的传递函数就成为

$$G_z(s)=\frac{z(s)}{u(s)}=\frac{(s+\lambda)(\beta_2 s^{n-2}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n)}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n}。$$

它的相对阶就是 1。只要取 $\lambda>0$，并且原系统是最小相位的和 $\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_n$ 均大于 0，那么应用推论 5.2.1，存在输出反馈 $u=kz$ 可以使得整个微分包含系统超稳定（见图 5.5）。

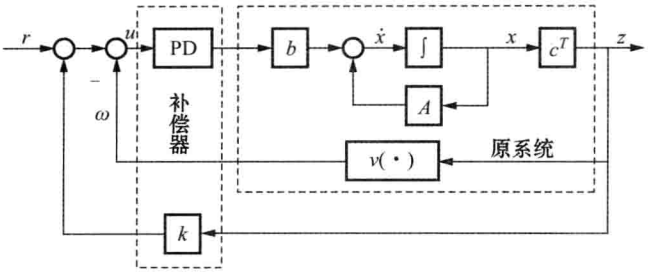


图 5.5 相对阶等于 2 时的反馈正实化设计

这种设计方法可以推广到相对阶 $i>1$ 的任意情形。这时，任意设计一个 $i-1$ 次实多项式 $\lambda(s)=(\lambda_1+s)\cdots(\lambda_{i-1}+s)$②，其中 $\lambda_p>0$，$p=1,2,\cdots,i-1$，这样从 u 到 z 的传递函数为 $G_z(s)=\lambda(s)G(s)$，其相对阶为 1，根据推论 5.2.1，这时总存在输出反馈使得闭环后系统是严格正实的。从而整个 Luré 型微分包含系统是强渐近稳定的。我们将上述讨论归纳成如下的推论。

推论 5.2.2 考虑单变量 Luré 型微分包含系统(5.2.2)，如果线性部分 (c^{T},A,b) 的传递函数的分子是 Hurwitz 多项式，且其首项系数为正数，那么总存在实多项式 $\lambda(s)$，使得 $z(s)=\lambda(s)y(s)$，和输出反馈 $u=kz$，使得闭环系统是超渐近稳定的。 □

注 由于分子多项式的零就是系统的零，因此这个引理条件可以叙述成“如果线性部分 (c^{T},A,b) 是最小相位的”。 □

根据推论 5.2.2 前面的讨论，Luré 型微分包含系统(5.2.2)的输出微分控制采用的是图 5.6 给出的方案。线性部分的输入 u 经过一个(高阶)微分环节 $\lambda(s)$ 产生辅助信号 z，作为执行信号输入被控对象的线性部分。然而如果系统是由线性部分和非线性部分组成的一个整体，单独改变线性部分方案是不现实的。

5.2.6 反馈镇定——多变量系统

现在考虑多变量情形。鉴于我们在单变量的讨论，多变量的情形已经变得非常简单。继续考虑 Luré 微分包含系统(5.2.2)，其线性部分为 (C,A,B)。注意我们已经假设了 $r=m$。记 $B=[b_1\ \ b_2\ \ \cdots\ \ b_m]$，其中 $b_i\in\mathbb{R}^n$，$i=1,2,\cdots,m$，那么系统的传递函数矩阵就成为

$$G(s)=[C(sI-A)^{-1}b_1\ \ C(sI-A)^{-1}b_2\ \ \cdots\ \ C(sI-A)^{-1}b_m]。$$

为了方便，记 $G_i(s)=C(sI-A)^{-1}b_i$。在本节第三节中将 C 写成 $C^T=[c_1\ \ c_2\ \ \cdots\ \ c_r]$，根

② 事实上，只要 $\lambda(s)$ 是首一的 Hurwitz 多项式就可以了。这里的假设只是为了论证方便。

据$c_i^T(sI-A)^{-1}B$定义的相对阶，这种相对阶称为行相对阶。显然关于 B 也可以定义相对阶，如果$\lim\limits_{s\to\infty} s^jG_i(s)=0, j=0,1,2,\cdots,q_i-1$；$\lim\limits_{s\to\infty} s^{q_i}G_i(s)\neq 0$，而且

$$\overline{\Pi}=[CA^{q_1}b_1 \quad CA^{q_2}b_2 \quad CA^{q_m}b_m]$$

是可逆的，则称$\{q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_m\}$是$(C,A,B)$的列相对阶集。列相对阶和行相对阶具有相同的性质我们将它们留在练习中。

设第 i 个列相对阶为 q_i，那么对一个 q_i-1 次多项式 $\Lambda_i(s)=(\lambda_{i,1}+s)\cdots(\lambda_{i,q_i-1}+s)$，成立 $\lim\limits_{s\to\infty} C(sI-A)^{-1}b_i\Lambda_i(s)=CA^{q_i}b_i$，因为$\overline{\Pi}$是可逆的，所以

$$\Lambda(s)G(s)=[C(sI-A)^{-1}b_1\Lambda_1(s) \quad C(sI-A)^{-1}b_2\Lambda_2(s)\cdots C(sI-A)^{-1}b_m\Lambda_m(s)]$$

的相对阶全为为 1，其中 $\Lambda(s)=\mathrm{diag}\{\Lambda_1(s)\cdots\Lambda_r(s)\}$。

如果 $G(s)=D_l^{-1}(s)N_l(s)$是一个左互质分解，那么总可以选择 $\Lambda(s)$，使得 $N_l(s)\Lambda(s)$和 $D_l(s)$右互质。因此 $N_l(s)\Lambda(s)$的有限零就是 $\Lambda(s)G(s)$的有限零。对 $\Lambda(s)G(s)$作最小实现：

$$\dot{\xi}=\mathfrak{A}\xi+\mathfrak{B}u,$$

$$\zeta=\mathfrak{C}\xi。$$

它的相对阶为 1，而且$\mathfrak{C}\mathfrak{B}=\overline{\Pi}$，系统的零是 $N_l(s)\Lambda(s)$的零点。根据定理 5.2.2，可以得到下面的结论。

定理 5.2.3　考虑 Lurć 微分包含系统(5.2.2)。如果集合值映射 $v(\cdot)$是单调的，线性部分(C,A,B)的零是稳定的，矩阵$\overline{\Pi}$是正定的，那么总存输入变换 $\overline{B}=B\Lambda(s)$，在反馈 $u(t)=kz(t)$下，闭环系统是强渐近稳定。　□

定理 5.2.3 给出的设计可以用图 5.6 的方案来实现。

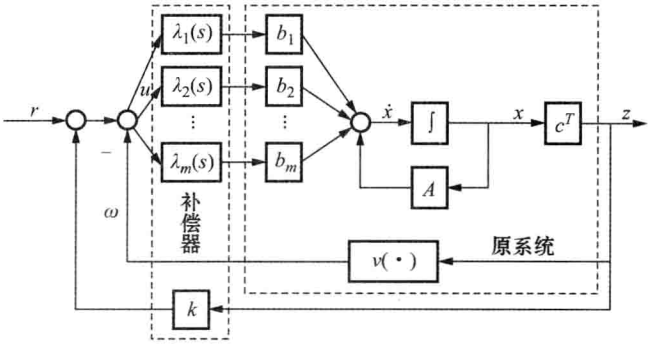


图 5.6　多输入时的反馈正实化设计

图 5.6 给出的镇定方案有一个多项式 $\lambda(s)$，而且当系统的相对阶大于 1 的时候，这个多项式的次数大于 0，这意味着这个方案中采用了微分器。而且采用这种补偿方案，要允许在集合值的输出端可以插入控制器。

练习

1. 设 $M(s)$是一个 $r\times m$ 的多项式矩阵，$M(s)=[m_1(s),\cdots,m_m(s)]$，$m_i(s)$是它的第 i 列。称

该列的 r 个多项式中最高的次数为 $M(s)$ 的第 i 列列次，记成 d_i，那么 $m_i(s)$ 可以写成 $m_i(s)=m_{d_i}s^{d_i}+m_{d_i-1}s^{d_i-1}+\cdots+m_0$，其中 $m_{d_i}\in\mathbb{R}^r$，m_{d_i} 称为 $M(s)$ 第 i 列的首项系数。记 $M_D=[m_{d_1}\cdots m_{d_m}]\in\mathbb{R}^{r\times m}$，$M_D$ 称为 $M(s)$ 列次矩阵，那么如果 $\mathrm{rank}M_D<\min(r,m)$，证明一定存在适当维数的单位模矩阵 $A(s)$ 和 $B(s)$，适当 $A(s)M(s)$ 的列次矩阵和 $M(s)B(s)$ 的列次矩阵的秩为 $\min(r,m)$。（这个过程一般称为正则化过程。）

2. 设 (C,A,B) 是能控又能观的线性系统，而且 $r=m$。如果 $\{p_1,p_2,\cdots p_r\}$ 是 (C,A,B) 的行构对阶集，$\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}$ 是它的列相对阶集，那末：

 (1) $\{p_1,p_2,\cdots,p_r\}=\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}$。

 (2) $\Pi=\overline{\Pi}$。

3. 已知

$$A=\begin{bmatrix}0&2&1\\2&0&1\\2&1&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&5&2\\-1&2&1\end{bmatrix}。$$

 求：(1) 求系统零，并判别是否为最小相位系统？

 (2) 设计反馈律，使得系统是严格正实的。

4. 已知

$$A=\begin{bmatrix}0&2&-1\\2&0&1\\2&1&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&4&2\\-1&2&1\end{bmatrix}。$$

 求：(1) 求系统零，并判别是否为最小相位系统？

 (2) 设计 $\Delta(s)=\begin{bmatrix}\lambda_1(s)&0\\0&\lambda_2(s)\end{bmatrix}$，使得 $\Delta(s)C(sI-A)^{-1}B$ 是最小相位的。

 (3) 设计反馈律，使得系统是严格正实的。

5. 证明：如果 (C,A,B) 是能控又能观的，那末存在状态反馈 $u=Fx$，其中 $F\in\mathbb{R}^{m\times n}$，使得 $(C,A+BF,B)$ 是严格正实的充分必要条件是：

 (1) $CB>0$。

 (2) (C,A,B) 是最小相位的。

 这个结论说明对于正实化问题来说，状态反馈与输出反馈需要的条件是一样的。

6. 证明行相对阶和列相对阶关于坐标变换、状态反馈和输出嵌入下都是不变的。

5.3　Luré 型微分包含系统的 Luenberger 观测器和分离设计

Luré 型微分包含系统的观测器设计是微分包含系统研究的热点之一，由于系统中含有集合值映射，其输出存在不确定性，因而导致了观测器设计的困难。本节研究 Luré 型微分包含系统的观测器问题，先考虑 Luré 型微分包含系统的全维观测器的设计问题，再讨论分离设计问题。

本节考虑如下的 Luré 型微分包含系统（见图 5.7）：

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+Br(t)-G\omega(t), \\ \omega(t) &\in \nu(Hx(t)), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$，$r(t)\in\mathbb{R}^m$ 和 $y(t)\in\mathbb{R}^r$ 分别是系统的状态、输入和输出，$\nu(\cdot)$ 是集合值映射，$\omega(t)\in\mathbb{R}^q$ 集合值映射的输出；A,B,C 是维数合适的实数矩阵，它们的意义和大小与前两节中的式(5.1.1)和式(5.2.1)中的一致。为了具有更一般性，本节增加了集合值映射的输入矩阵 $H\in\mathbb{R}^{q\times n}$ 和输出矩阵 $G\in\mathbb{R}^{n\times q}$。不失一般性地可以假定 B 和 G 都是列满秩的，而 C 是行满秩的。我们以后会证明如果式(5.3.1)存在 Luenberger 观测器，那么 H 必定是行满秩的。（反之，如果已知 H 是行满秩的，则 G 都是列满秩的。）如果 $G=B$ 和 $H=C$，那么，式(5.3.1)就是式(5.2.2)，因此式(5.3.1)可以看成是比式(5.2.2)更普通的一种形式。在 Luré 型微分包含系统中，集合值映射 $\nu(\cdot)$ 都假定是单调的，即如果 $\omega_i\in\nu(Hx_i)$，$i=1,2$，那么成立 $\langle\omega_1-\omega_2, Hx_1-Hx_2\rangle\geqslant 0$。

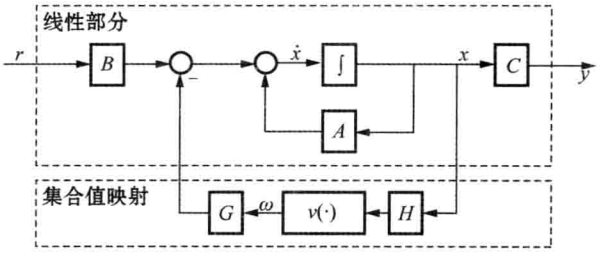


图 5.7　Luré 型微分包含系统

5.3.1　适定性问题

在微分包含(5.3.1)中，总认为控制输入 $r(t)$ 是分段连续函数，因此对于线性微分方程的 Cauchy 问题 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Br(t)$，$x(0)=x_0$ 来说，解总是存在的，只是在那些分段的端点上，左导数和右导数未必相等。也可以按照 2.3 节中的说法，当 $r(t)$ 是分段连续函数时，考虑方程

$\dot{x}(t)=Ax(t)+Br(t)$的 Filippov 解。Filippov 解总是存在的，而且这两个解在除出现间断的端点之外的点上是一致的。

当考虑到集合值映射的输出时，即讨论下列微分包含的 Cauchy 问题：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)+Br(t)-G\omega(t),\\ \omega(t) &\in \nu(Hx(t)),\\ x(0) &= x_0,\end{aligned}$$

其中 $\omega\in\nu(\cdot)$。它的解存在性缺乏理论支持。本书第 2 章给出一系列微分包含解的存在性定理，这些定理的基本要求是满足 Lipschitz 条件和集合值映射的闭性。因此当集合值映射 $\nu(\cdot)$ 只是单调的时候，无法保证微分包含解的存在性，即使是像$\dot{x}(t)=Ax(t)+Br(t)-G\omega(t)$这类具有线性结构的微分包含。

确定存在解的问题有时也称为**适定性问题**。在微分包含观测器设计中，解决适定性问题有两种方法：一种是直接假设对于任意的 $\omega(t)\in\nu(Hx(t))$，微分方程 Cauchy 问题$\dot{x}(t)=Ax(t)+Br(t)-G\omega(t)$，$x(0)=x_0$ 的解存在；或者假设集合值映射 $\nu(\cdot)$是闭凸和 Lipschitz 的。另一种方法是假设集合值映射 $\nu(\cdot)$是极大单调的，那么，$\dot{x}(t)=Ax(t)+Br(t)-G\omega(t)$，$x(0)=x_0$ 的解不仅存在，而且在除了一个零测度集外是唯一的(也称几乎处处是唯一的)。

为了下面的需要，这里证明一个简单的事实。

引理 5.3.1 设集合值映射 $\nu(\cdot):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$是极大单调的，那么$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$的映射 $x\mapsto H^{\mathrm{T}}\nu(Hx+h)$也是极大单调的，其中 $x\in\mathbb{R}^n$，$h\in\mathbb{R}^m$，$H\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$H$ 是行满秩的。

证明：设 $y_i\in H^{\mathrm{T}}\nu(Hx_i+h)$，$i=1,2$，则存在 $\omega_i\in\nu(Hx_i+h)$，使得 $y_i=H^{\mathrm{T}}\omega_i$。因为 H 是行满秩时，所以当 y_i 确定以后 ω_i 是唯一的。考虑

$$\langle y_1-y_2,x_1-x_2\rangle=\langle H^{\mathrm{T}}\omega_1-H^{\mathrm{T}}\omega_2,x_1-x_2\rangle=\langle\omega_1-\omega_2,Hx_1-Hx_2\rangle,$$

而$\langle\omega_1-\omega_2,(Hx_1+h)-(Hx_2+h)\rangle=\langle\omega_1-\omega_2,Hx_1-Hx_2\rangle\geqslant 0$。因此$\langle y_1-y_2,x_1-x_2\rangle\geqslant 0$，即 $x\mapsto H^{\mathrm{T}}\nu(Hx+h)$是单调的。

现在证明 $x\mapsto H^{\mathrm{T}}\nu(Hx+h)$是极大的。显然 $\nu(Hx+h)$是极大的，如果 $\nu(Hx)$是极大的。因此只要证明 $x\mapsto H^{\mathrm{T}}\nu(Hx)$是极大的。

设 $y_1\in H^{\mathrm{T}}\nu(Hx_1)$，如果 $y_2\in\mathrm{Im}H^{\mathrm{T}}$，存在 $x_2\in\mathbb{R}^n$，使得$\langle y_1-y_2,x_1-x_2\rangle\geqslant 0$。因为 $y_2\in\mathrm{Im}H^{\mathrm{T}}$，所以存在 $\omega_2\in\mathbb{R}^m$，使得 $y_2=H^{\mathrm{T}}\omega_2$；而 $y_1\in H^{\mathrm{T}}\nu(Hx_1)$，因此存在 $\omega_1\in\nu(Hx_1)$，使得 $y_1=H^{\mathrm{T}}\omega_1$。于是$\langle y_1-y_2,x_1-x_2\rangle\geqslant 0$ 就是$\langle\omega_1-\omega_2,Hx_1-Hx_2\rangle\geqslant 0$。因为 $\nu(Hx)$是极大的，所以 $\omega_2\in\nu(Hx_2)$，即 $y_2\in H^{\mathrm{T}}\nu(Hx_2)$。 □

本节以后总假定微分包含式(5.3.1)是适定的，这包含了 $\nu(\cdot)$是极大单调的情形。

5.3.2 Luenberger 型状态观测器

考虑如下的动态系统

$$\dot{\hat{x}}(t)=(A-LC)\,\hat{x}(t)+Br(t)-G\hat{\omega}(t)+Ly(t),$$

$$\hat{\omega}(t) \in \nu(H\hat{x}(t)), \tag{5.3.2}$$

其中$\hat{x}$是状态，$\hat{\omega}$是集合值映射的输出，$L \in \mathbb{R}^{n\times r}$以后称为观测器增益，它的作用是使得 $A-LC$ 是 Hurwitz 矩阵。根据线性系统理论，当(A,C)能观时必定存在 L 使得 $A-LC$ 是 Hurwitz 矩阵。形为式(5.3.2)的动态系统称为微分包含系统(5.3.1)的 Luenberger(全维)观测器(见图 5.8)，如果用 $S_{[1]}(x_0,r(t))$和 $S_{[2]}(\hat{x}_0,r(t))$分别表示式(5.3.1)和式(5.3.2)当初始条件为 x_0 和$\hat{x}_0$、输入为 $r(t)$的微分包含的解集，那么它们满足：当 $x_0 \neq \hat{x}_0$ 时，对任何两个 $x_1(t)\in S_{[1]}(x_0,r(t))$，$x_2(t)\in S_{[2]}(\hat{x}_0,r(t))$，成立

$$\| x_1(t)-x_2(t) \| \to 0(t\to\infty)。$$

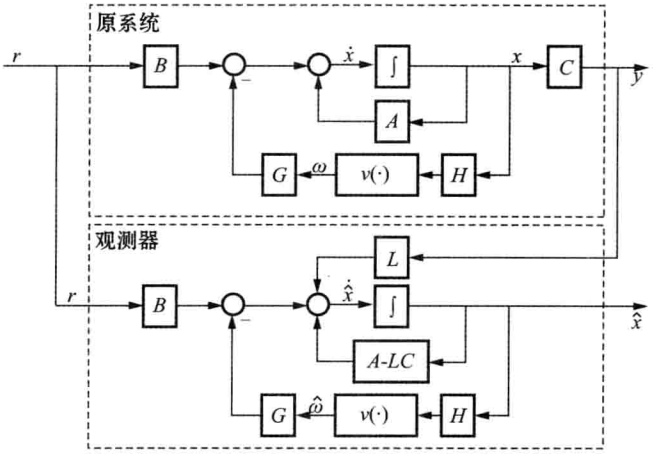


图 5.8　原系统和观测器

将式(5.3.1)减去式(5.3.2)得到

$$\begin{aligned}
&\dot{x}-\dot{\hat{x}} = (A-LC)(x-\hat{x})+G\omega-G\hat{\omega},\\
&\omega \in \nu(Hx),\\
&\hat{\omega} \in \nu(H\hat{x}),\\
&y = Cx。
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

记 $e=x-\hat{x}$，e 称为状态误差。将式(5.3.3)前三式改写成

$$\begin{aligned}
&\dot{e} = (A-LC)e+G(\omega-\hat{\omega}),\\
&\omega \in \nu(Hx),\\
&\hat{\omega} \in \nu(H\hat{x})。
\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

观测器设计就是寻找 L，使得 $e\to 0(t\to\infty)$。

定理 5.3.1　考虑微分包含系统(5.3.1)和(5.3.2)，如果：

(1) 存在 L 使得$(H,A-LC,G)$是能控能观的和严格正实的；

(2) $\nu(\cdot)$是单调的；

(3) 微分包含(5.3.4)的解存在。

那么系统(5.3.2)是系统(5.3.1)的 Luenberger 观测器。

证明：记 $z=Hx$ 和 $\hat{z}=H\hat{x}$ 分别为系统式(5.3.1)和观测器式(5.3.2)的辅助输出，那么由于 $\nu(\cdot)$ 是单调的，因此 $\langle\omega-\hat{\omega},z-\hat{z}\rangle\geqslant 0$。记 $\mu=\omega-\hat{\omega}$ 和 $\zeta=H(x-\hat{x})$，那么式(5.3.4)就是

$$\begin{aligned}\dot{e}&=(A-LC)e+G\mu,\\ \zeta&=He\\ \mu&\in\nu(Hx)-\nu(H\hat{x})。\end{aligned}$$

令 $\nu(e,x)=\nu(Hx)-\nu(H\hat{x})=\nu(Hx)-\nu(H(x-e))$。显然 $0\in\nu(0,x)$ 对一切 x 成立。将 μ 视作式(5.3.4)线性部分的输入，ζ 为输出，$\langle\omega-\hat{\omega},z-\hat{z}\rangle\geqslant 0$ 蕴含 $\langle\mu,\zeta\rangle\geqslant 0$。因此，应用定理5.1.9，定理5.3.1成立。 □

根据定理5.3.1，Luenberger观测器设计的关键在于使得 $(H,A-LC,G)$ 是严格正实的。与本章5.2节不同的是那里讨论的系统是 (C,A,B)，反馈是通过 C,B 实现的；而这里讨论的是 (H,A,G)，但是反馈不是通过 H,G 实现的。因为其中涉及了五个矩阵 A,C,B,H,G，结论的表述比较复杂。以下总假定 (C,A,B) 和 (H,A,G) 都是能控又能观的。先叙述一个引理，这个引理在正实化问题的研究中很有用。

引理5.3.2 设 P 是给定的 $m\times m$ 实对称矩阵，$U\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$V\in\mathbb{R}^{m\times l}$ 都是给定的列满秩矩阵，用 $U_\perp$ 和 $V_\perp$ 分别表示 U 和 V 的正交补矩阵①，那么存在 Q 使得

$$P+UQV^{\mathrm{T}}+VQ^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}<0 \tag{5.3.5}$$

的充分必要条件是

$$(U_\perp)^{\mathrm{T}}PU_\perp<0,(V_\perp)^{\mathrm{T}}PV_\perp<0。$$ □

引理5.3.2的意义在于：式(5.3.5)中 U 和 V 是在同一项出现的，且伴随着未知矩阵 Q；而在引理的条件中，$U_\perp$ 和 $V_\perp$ 是分别出现在两个独立的不等式中，并且伴随的 P 是已知的，从而使得问题容易解决。引理5.3.2常被称为Parrott定理的正实形式，它的证明可以参考文献[17,18,19]，这里略去，那些文章还给出了满足式(5.3.5)的 Q 的通式。

需要说明的是：如果 $m=n$，那么 U 的列满秩蕴含 U 是可逆矩阵，这时 $U_\perp$ 就是一个元素0。这时应该在引理的条件中将 $(U_\perp)^{\mathrm{T}}PU_\perp<0$ 去掉。这个事实也可以从广义的Finsker定理得到。具体说明如下，因为如果 U 是可逆矩阵，可令 $K=UQ$，则由 K 可以唯一地确定 Q。此时再设 $K=kV$，那么

$$P+UQV^{\mathrm{T}}+VQ^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}=P+2kVV^{\mathrm{T}}。$$

由Finsker定理存在 k，使得 $P+2kVV^{\mathrm{T}}<0$ 的充分必要条件是 $V_\perp^{\mathrm{T}}PV_\perp<0$[20]。

引理5.3.3 如果 G 是列满秩的，那么存在 L 使得 $(H,A-LC,G)$ 为严格正实的充分必要条件是：

(1) $HG>0$，即 H 是行满秩的。

(2) 存在矩阵 $X\in\mathbb{R}^{(n-q)\times(n-q)}$，使得 $G_\perp XG_\perp^{\mathrm{T}}>0$，且

① $U_\perp$ 称为矩阵 U 的正交补矩阵，如果 $U\in\mathbb{R}^{m\times n}$，则 $U_\perp\in\mathbb{R}^{m\times(m-n)}$，而且 $[U\ U_\perp]$ 是可逆的 $n\times n$ 矩阵，并对任意的 $u\in\operatorname{span}U,u'\in\operatorname{span}U_\perp$，都成立 $\langle u,u'\rangle=0$。

$$C_{\perp}\left[(H^{\mathrm{T}}(HG)^{-1}H+G_{\perp}\,XG_{\perp}^{\mathrm{T}})A+A^{\mathrm{T}}(H^{\mathrm{T}}(HG)^{-1}H+G_{\perp}\,XG_{\perp}^{\mathrm{T}})\right]C_{\perp}^{\mathrm{T}}<0。$$

证明：如果$(H,A-LC,G)$是严格正实，那么存在正定矩阵 P 使得

$$\begin{aligned}&P(A-LC)+(A-LC)^{\mathrm{T}}P<0,\\&G^{\mathrm{T}}P=H。\end{aligned}\tag{5.3.6}$$

因为 G 是列满秩的，$HG=G^{\mathrm{T}}PG>0$，结论(1)获证。

可以验证满足 $G^{\mathrm{T}}P=H$ 的 P 的通解是

$$P=H^{\mathrm{T}}(HG)^{-1}H+G_{\perp}\,XG_{\perp}^{\mathrm{T}},\tag{5.3.7}$$

其中 $X\in\mathbb{R}^{(n-q)\times(n-q)}$ 为任意的正定矩阵。式(5.3.6)的第一式等于

$$PA+A^{\mathrm{T}}P-PLC-(LC)^{\mathrm{T}}P<0。\tag{5.3.8}$$

应用引理 5.3.2，得到式(5.3.8)成立的充分必要条件是

$$C_{\perp}(PA+A^{\mathrm{T}}P)C_{\perp}^{\mathrm{T}}<0^{②}。$$

将式(5.3.7)代入，得到

$$C_{\perp}\left[(H^{\mathrm{T}}(HG)^{-1}H+G_{\perp}\,XG_{\perp}^{\mathrm{T}})A+A^{\mathrm{T}}(H^{\mathrm{T}}(HG)^{-1}H+G_{\perp}\,XG_{\perp}^{\mathrm{T}})\right]C_{\perp}^{\mathrm{T}}<0。$$

必要性获证。

反之，如果定理条件成立，由式(5.3.7)得到 P，这个 P 使得 $G^{\mathrm{T}}P=H$，而且由定理的条件(2)成立 $C_{\perp}(PA+A^{\mathrm{T}}P)C_{\perp}^{\mathrm{T}}<0$。由引理 5.3.2，得到存在 L 使得式(5.3.8)成立，即$(H,A-LC,G)$为严格正实的。 □

注意到定理中条件 2 不等式中的未知量是矩阵 X，而这个不等式关于 X 是线性的。可以应用线性矩阵不等式工具来求解。关于单独求解不等式 $C_{\perp}(PA+A^{\mathrm{T}}P)C_{\perp}^{\mathrm{T}}<0$，我们在练习中提供一种更简便的方法，但是它与 $G^{\mathrm{T}}P=H$ 没有联系。

应用引理 5.3.2 可以得到进一步的结果。分析

$$C_{\perp}\left[(H^{\mathrm{T}}(HG)^{-1}H+G_{\perp}\,XG_{\perp}^{\mathrm{T}})A+A^{\mathrm{T}}(H^{\mathrm{T}}(HG)^{-1}H+G_{\perp}\,XG_{\perp}^{\mathrm{T}})\right]C_{\perp}^{\mathrm{T}}<0。$$

为了记号简单，记 $M=C_{\perp}G_{\perp}$，$N=H^{\mathrm{T}}(HG)^{-1}H$，那么 $M\in\mathbb{R}^{(n-r)\times(n-q)}$，$N\in\mathbb{R}^{n\times n}$，并且 N 是半正定矩阵。用这些记号，上述不等式就是

$$C_{\perp}\,(NA+A^{\mathrm{T}}N)C_{\perp}^{\mathrm{T}}+MXG_{\perp}^{\mathrm{T}}\,AC_{\perp}^{\mathrm{T}}+C_{\perp}\,A^{\mathrm{T}}G_{\perp}\,XM^{\mathrm{T}}<0。\tag{5.3.9}$$

再次应用引理 5.3.2，得到式(5.3.9)成立的充分必要条件是

$$M_{\perp}^{\mathrm{T}}\,C_{\perp}\,(NA+A^{\mathrm{T}}N)C_{\perp}^{\mathrm{T}}\,M_{\perp}<0,(C_{\perp}\,A^{\mathrm{T}}G_{\perp})_{\perp}^{\mathrm{T}}\,C_{\perp}\,(NA+A^{\mathrm{T}}N)C_{\perp}^{\mathrm{T}}\,C_{\perp}\,A^{\mathrm{T}}G_{\perp}<0。$$

因此得到如下的定理 5.3.2。

定理 5.3.2　如果 G 是列满秩的，那么存在 L 使得$(H,A-LC,G)$为严格正实的充分必要条件是：

(1) $HG>0$，即 H 是行满秩的；

② 这里沿用正交补矩阵记号，$C_{\perp}$ 的意义与 $U_{\perp}$ 略有不同，因 C 是行满秩的，$C_{\perp}$ 是 $(n-r)\times n$ 的矩阵，它使得 $\begin{bmatrix}C\\C_{\perp}\end{bmatrix}$ 是可逆的，而且 $CC_{\perp}^{\mathrm{T}}=0$。

(2) $M_\perp^{\mathrm{T}}C_\perp(NA+A^{\mathrm{T}}N)C_\perp^{\mathrm{T}}M_\perp<0,(C_\perp A^{\mathrm{T}}G_\perp)_\perp^{\mathrm{T}}C_\perp(NA+A^{\mathrm{T}}N)C_\perp^{\mathrm{T}}C_\perp A^{\mathrm{T}}G_\perp<0$,

其中 $M=C_\perp G_\perp$,$N=H^{\mathrm{T}}(HG)^{-1}H$。 □

引理 5.3.4 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$,$B\in\mathbb{R}^{n\times m}$,$C\in\mathbb{R}^{r\times n}$,$B$ 和 C 分别是列满秩和行满秩的,那么

$$\max_{K\in\mathbb{R}^{m\times r}}\operatorname{rank}(A+BKC)=\min\left\{\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix},\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A\\ C\end{bmatrix}\right\},$$

而且对几乎所有的 $K\in\mathbb{R}^{m\times r}$ 等式成立。 □

引理 5.3.4 是矩阵论中的标准练习,它的证明可以参阅文献[21]。

性质 $\mathfrak{P}$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集性质,如果性质 $\mathfrak{P}$ 在 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 成立,那么存在 x_0 的一个邻域 O,使得对一切 $x\in O$ 的 x 都成立性质 $\mathfrak{P}$。根据这个概念,对于 $K\in\mathbb{R}^{m\times r}$ 使得 $A+BKC$ 最大秩的性质是开集性质。

熟知的开集性质有:设 $s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$ 是个 Hurwitz 多项式,那么将它的系数 $[1\quad a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n]^{\mathrm{T}}$ 看成 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个向量,那么它是 Hurwitz 向量。Hurwitz 向量具有开集性质,即存在 $\varepsilon>0$,使得对任意的 $\delta\in[-\varepsilon,\varepsilon]$,$(1+\delta)s^n+(a_1+\delta)s^{n-1}+\cdots+(a_{n-1}+\delta)s+a_n+\delta$ 都是 Hurwitz 多项式,即可以使 $[1+\delta\quad a_1+\delta\quad a_2+\delta\quad\cdots\quad a_n+\delta]^{\mathrm{T}}$ 是 Hurwitz 向量。类似地,将有理函数 $\dfrac{b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$ 的系数 $[a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n\quad b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n]^{\mathrm{T}}$ 看成 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的一个向量,那么有理函数 $\dfrac{b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$ 的严格正实性是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的开集性质。这个结论可以推广。设 $G(s)$ 是 $r\times m$ 有理函数矩阵,将 $G(s)$ 的系数按照一定的规律写成一个向量 $g_0\in\mathbb{R}^l$。如果 $G(s)$ 是严格正实矩阵,那么总存在 g_0 的一个充分小领域 $G\subset\mathbb{R}^l$,对一切 $g\in G$ 按照上述规律将它复原成一个 $r\times m$ 有理函数矩阵,这个有理函数矩阵依然是严格正实的。

如果存在 L_0 使得 $(H,A-L_0C,G)$ 为严格正实的,那么 L_0 的任意一个领域内一定存在 L,使矩阵 $A-LC$ 达到最大秩,同时 $(H,A-LC,G)$ 仍然是严格正实的。以后我们总认为 $(H,A-LC,G)$ 严格正实和 $A-LC$ 达到最大秩同时成立。下面的定理给出一个必要条件,它相对容易判别。

定理 5.3.3 存在 L,使得 $(H,A-LC,G)$ 是严格正实的必要条件是 $\left(\begin{bmatrix}H\\ C\end{bmatrix},A,G\right)$ 有且只有 $n-q$ 个稳定的零点。

证明:如果系统 $(H,A-LC,G)$ 是严格正实的,那么它必然是最小相位的,也就是 $(H,A-LC,G)$ 有且只有 $n-q$ 个稳定的零,即存在 $n-q$ 个负实部的复数 $s_1,s_2,\cdots,s_{n-q}$,使得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}s_jI-A+LC & G\\ H & 0\end{bmatrix}<n+q,\quad j=1,2,\cdots,n-q。$$

因为 $(H,A-LC,G)$ 是严格正实的,因此不妨假设这个 L,对所有的 s_j 同时达到 $\begin{bmatrix}s_jI-A+LC & G\\ H & 0\end{bmatrix}$

的秩最大。因此，利用引理 5.3.2，

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} s_jI-A & G \\ H & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} < n+q。$$ □

定理 5.3.3 可以用标准的程序求解，因此比较容易验证，下面的推论也许更方便。

推论 5.3.1　如果$(H,A-LC,G)$是严格正实的，则$\begin{bmatrix} H \\ C \end{bmatrix}$的列是线性相关的。 □

推论 5.3.1 是定理 5.3.3 的直接结果。

5.3.3　应用观测器的状态反馈

在这一小节继续讨论 5.2 节提出的反馈镇定问题，我们采用 5.2 节中的系统模型，即在式(5.3.1)中设 $B=G,H=C$。

对于状态不是直接能观测的系统，只要图 5.4 中线性部分的输入信号 u 是可以获得的，那末，(c^{T},A)的能观性保证存在渐近状态观测器

$$\dot{\hat{x}} = (A-lc^{\mathrm{T}})\,\hat{x}+bu+ly,$$

其中的向量 l 使得 $A-lc^{\mathrm{T}}$ 是 Hurwitz 矩阵，从而实现 $x-\hat{x}\to 0(t\to\infty)$。

设 $u=f^{\mathrm{T}}x-\omega+r$ 是一个设计好的状态反馈方案，在采用了这个方案之后，对象的线性部分为

$$\dot{x} = (A+bf^{\mathrm{T}})x-b\omega+br,$$

由 r 到 y 的传递函数是

$$c^{\mathrm{T}}(sI-A-bf^{\mathrm{T}})^{-1}b。$$

考虑用$\hat{x}$代替 x 完成反馈，即 $u=f^{\mathrm{T}}\,\hat{x}-\omega+r$，可以得到闭环系统为(参见图 5.9)：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+bf^{\mathrm{T}} & -bf^{\mathrm{T}} \\ 0 & A-lc^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} r - \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}\omega,$$

$$\omega \in \nu(x),$$

$$y = c^{\mathrm{T}}x,$$

其中的 $e=x-\hat{x}$是状态的偏差。因为 e 是不能控的，容易验证闭环后由 u 到 y 的传递函数还是

$$c^{\mathrm{T}}(sI-A-kbc_e^{\mathrm{T}})^{-1}b,$$

与原设计的一样。

如果线性部分的输入 u 是不可获得，这时观测器也必然出现集合值映射，采用式(5.3.2)描述的 Luenberger 型观测器：

$$\dot{\hat{x}} = (A-lc^{\mathrm{T}})\,\hat{x}+br-b\hat{\omega}+ly,$$

$\hat{\omega} \in \nu(x)$。

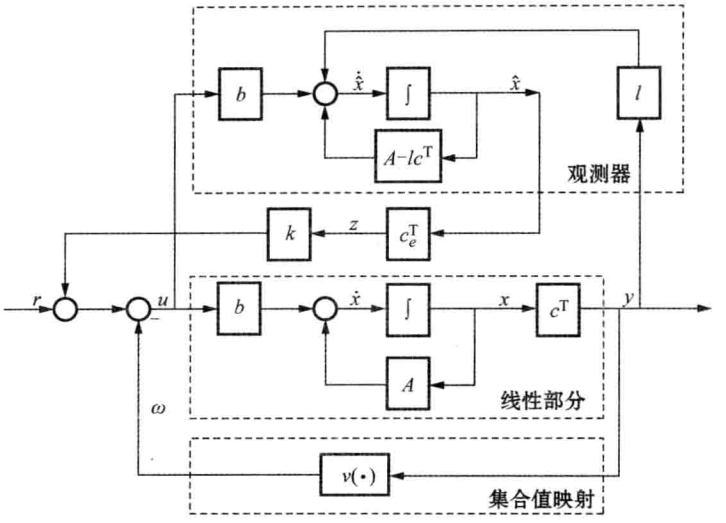


图 5.9 应用状态观测器的镇定设计

这时在采用了反馈 $u=f^{\mathrm{T}}\hat{x}-\omega+r$ 之后整个系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{e}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+kbc_e^{\mathrm{T}} & -kbc_e^{\mathrm{T}}\\ 0 & A-lc^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ e\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b\\ 0\end{bmatrix}r+\begin{bmatrix}-b & 0\\ -b & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\ \hat{\omega}\end{bmatrix},$$

$$\omega \in \nu(x),$$

$$\hat{\omega} \in \nu(\hat{x}),$$

$$y = c^{\mathrm{T}}x。$$

这时线性部分的能控部分传递函数还是

$$c^{\mathrm{T}}(sI-A-bf^{\mathrm{T}})^{-1}b,$$

与用 $u=f^{\mathrm{T}}x-\omega+r$ 的效果一样，在线性控制系统理论中，这个事实称为**分离设计原理**。

定理 5.3.4 在 Luré 微分包含系统(5.2.2)中，如果系统是适定的和线性部分(c^{T},A,b)是能控又能观的，那么对任意设计的状态反馈 $u=fx-\omega+r$，总存在渐近观测器(5.3.2)和应用观测器输出组成的线性反馈，使得闭环系统中输入 r 到输出 y 的传递函数不变。 □

定理 5.3.4 可以推广到多变量情形，不再赘述。

5.3.4 降维 Luenberger 型观测器

在线性系统设计理论中，降维观测器是一个专门的课题。考虑 Luré 微分包含系统(5.3.1)由于输出 $y=Cx$ 中 C 是行满秩的，因此总可以通过坐标变换写成 $y=[I\ \ 0]x$，其中的 I 是 $r\times r$ 的单位矩阵，因此输出 y 就是状态的前 r 维分量，我们不必再构造观测器来观测这 r 维子状态，而只要构造一个 $n-r$ 维状态观测器生成后面的 $n-r$ 维状态分量就可以了。这样的观测

器称为**降维观测器**。降维观测器的研究主题是：如果存在(全维)观测器，是否也存在降维观测器？定理 5.3.5 给出这个问题的基本结论。

考虑 Luré 微分包含系统(5.3.1)，总存在状态等价变换，使得系统的状态空间表达具有下列形式。

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}r-\begin{bmatrix}G_1\\ G_2\end{bmatrix}\omega,\\ &\omega\in\nu(Hx)=\nu(H_1x_1+H_2x_2),\\ &y=[I_r\quad 0]x=x_1。\end{aligned}\tag{5.3.10}$$

严格地说，经过状态等价变换，状态变量 x 和矩阵 A,B,G,H 等都需要换成与式(5.3.1)不同的记号，例如换成 $\bar{x}$ 和 $\bar{A},\bar{B},\bar{G},\bar{H}$ 等。但是为了记号的简单，这里没有做这种改变，因为它不会影响结论的成立，希望读者记住尽管符号相同，但具体的数值是会改变的。

定理 5.3.5　考虑 Luré 微分包含系统(5.3.1)，如果定理 5.3.1 的条件满足，那么它也存在降维观测器。

证明：如果定理 5.3.1 的条件成立，存在 L，使得$(H,A-LC,G)$是严格正实的，即存在正定矩阵 P 使得

$$\begin{aligned}&P(A-LC)+(A-LC)^{\mathrm{T}}P<0,\\ &PG=H^{\mathrm{T}}。\end{aligned}$$

应用(5.3.10)的分块形式，得到

$$\begin{bmatrix}* & *\\ * & P_{12}A_{12}+P_{22}A_{22}+A_{12}^{\mathrm{T}}P_{12}^{\mathrm{T}}+A_{22}^{\mathrm{T}}P_{22}\end{bmatrix}<0,\quad \begin{bmatrix}P_{11}G_1+P_{12}G_2\\ P_{12}^{\mathrm{T}}G_1+P_{22}G_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_1^{\mathrm{T}}\\ H_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

其中的 $*$ 表示确定的元素，但是在解决问题时并不需要它们的准确数字。因此得到 $P_{12}A_{12}+P_{22}A_{22}+A_{12}^{\mathrm{T}}P_{12}^{\mathrm{T}}+A_{22}^{\mathrm{T}}P_{22}<0$ 和 $P_{12}^{\mathrm{T}}G_1+P_{22}G_2=H_2^{\mathrm{T}}$。

设 $K=-P_{22}^{-1}P_{12}$，那么

$$\begin{aligned}&P_{22}(A_{22}-KA_{12})+(A_{22}-KA_{12})^{\mathrm{T}}P_{22}\\ =&P_{22}A_{22}+P_{12}A_{12}+A_{22}^{\mathrm{T}}P_{22}+A_{12}^{\mathrm{T}}P_{12}^{\mathrm{T}}\\ <&0\end{aligned}\tag{5.3.11}$$

和

$$P_{22}(G_2-KG_1)=H_2^{\mathrm{T}}。\tag{5.3.12}$$

构造系统：

$$\begin{aligned}&\dot{\hat{z}}=(A_{22}-KA_{12})\hat{z}+(G_2-KG_1)\hat{\omega}+(G_2-KG_1)r+\\ &\quad[(A_{21}-KA_{11})+(A_{22}-KA_{12})K]y,\\ &\hat{\omega}\in\nu(H_2\hat{z}+(H_1-H_2K)y),\\ &\hat{x}_2=\hat{z}+Ky,\end{aligned}\tag{5.3.13}$$

其输入为 r 和 y，输出是 $\hat{x}_2$。要使得式(5.3.13)是一个降维观测器，只要使得 $\hat{x}_2$ 趋向 x_2。

由式(5.3.10)得到

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 - K\dot{y} = &(A_{22} - KA_{12})x_1 + (G_2 - KG_1)\omega + \\ &(G_2 - KG_1)r + (A_{21} - KA_{11})y。\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

设 $z = x_2 - Kx_1 = x_2 - Ky$ 和 $e = z - \hat{z}$，将式(5.3.13)减去式(5.3.14)得到

$$\begin{aligned}&\dot{e} = (A_{22} - KA_{12})e + (G_2 - KG_1)(\omega - \hat{\omega}),\\ &\omega \in \nu((H_1 + H_2K)y + H_2z),\\ &\hat{\omega} \in \nu((H_1 + H_2K)y + H_2\hat{z})。\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

类似于定理 5.3.1 的证明，设 $\mu = \omega - \hat{\omega}$ 和 $\zeta = H_2e$，那么式(5.3.15)就是

$$\begin{aligned}&\dot{e} = (A_{22} - KA_2)e + (G_2 - KG_1)\mu,\\ &\mu \in \nu((H_1 + H_2K)y + H_2z) - \nu((H_1 + H_2K)y + H_2(z - e))。\\ &\zeta = H_2e\end{aligned}$$

式(5.3.11)和式(5.3.12)蕴含 $(H_2, (A_{22} - KA_{12}), (G_2 - KG_1))$ 是严格正实的，而 $\nu(\cdot)$ 的单调性蕴含集合值映射的输入和输出之间满足 Popov 不等式，因此 $e \to 0$，即 $\hat{x}_2 \to x_2$。 □

动态系统(5.3.13)的维数为 $n - r < n$，它是降维观测器。

练习

1. 用 μ 和 ν 分别表示正定矩阵 P 的正惯性指数和负惯性指数，那么 $\mathbb{R}^n = P_+ \oplus P_-$ 为线性空间 $\mathbb{R}^n$ 的正交分解，其中 $\dim P_+ = \mu$，而且当 $x \in P_+, x \neq 0$ 时，成立 $x^{\mathrm{T}}Px > 0$；而 $\dim P_- = \nu$，当 $x \in P_-, x \neq 0$，成立 $x^{\mathrm{T}}Px < 0$。证明 $V_\perp^{\mathrm{T}} PV_\perp < 0$ 的充分必要条件是对任意的 $x \in \mathrm{span}V_\perp, x = x_+ + x_-, x_+ \in P_+, x_- \in P_-, x_+^{\mathrm{T}}Px_+ + x_-^{\mathrm{T}}Px_- < 0$。

2. 证明当 $CB > 0$ 时，方程 $B^{\mathrm{T}}P = C$ 的正定解的通解具有形式

$$P = C^{\mathrm{T}}(CB)^{-1}C + B_\perp XB_\perp^{\mathrm{T}},$$

其中 $X \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$，而且使得 $B_\perp XB_\perp^{\mathrm{T}}$ 是正定的。

3. 考虑 Luré 微分包含

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}r - \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\omega, \quad \omega = \begin{cases}t+1, & t \in (0,\infty),\\ [-1,1], & t = 0,\\ -t-1, & t \in (-\infty,0),\end{cases} \quad y = [1 \ \ 0]x。$$

设计它的 Lueuberger 观测器和降维观测器。

4. 考虑不等式：$C_\perp[(H^{\mathrm{T}}(HG)^{-1}H + G_\perp XG_\perp^{\mathrm{T}})A + A^{\mathrm{T}}(H^{\mathrm{T}}(HG)^{-1}H + G_\perp XG_\perp^{\mathrm{T}})]C_\perp^{\mathrm{T}} < 0$。当定理 5.3.2 的条件满足时，对 (H, A, G) 应用式(5.2.4)，推导出上述不等式的简化形式和成立的条件。

5. 如果 $C_\perp = [C_2 \ \ 0]$，C_2 是可逆矩阵，对应地，A 可以分解成：

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},$$

那么存在正定矩阵，使得 $C_{\perp}(PA+A^{\mathrm{T}}P)C_{\perp}^{\mathrm{T}}<0$ 的充分必要条件是(A_{21},A_{22})是能观的。

6. 如果将观测器设定成

$$\dot{\hat{x}}(t)=(A-LC)\hat{x}(t)+Br(t)-G\hat{\omega}(t)+Ly(t),$$
$$\hat{\omega}(t)\in\nu(H\hat{x}(t)+KC\hat{x}(t)-Ky),$$

那么对定理 5.3.1 要做怎样的改动？这个改动增加设计自由度，多了一个待定矩阵 K。

7. 试证明定理 5.3.4。

5.4 Luré 型微分包含系统的线性观测器

上一节中设计了 Luré 型微分包含系统的 Leunberger 型观测器，在设计降维观测器的时候，我们提到输出 y 包含了状态的一部分信息，于是它也必然地包含了集合值映射的输出 ω 的一部分信息，那么能否从 y 分析出 ω 来，而使得观测器不含集合值映射呢？本节就讨论这个问题，探讨 Luré 型微分包含系统的不含有集合值映射的观测器形式和条件，由于这类观测器与 Luenberger 观测器的结构不尽相同，为区别起见本文称它为**线性观测器**。

本节考虑如下的 Luré 型微分包含系统：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + G\omega + Bu, \\ \omega &\in \nu(x), \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$，$u\in\mathbb{R}^m$，$y\in\mathbb{R}^r$，$\omega\in\mathbb{R}^q$，分别是系统的状态、输入、输出和集合值映射的输出，A，B，G，C 是维数适当的实数矩阵。这里对于集合值映射 $\nu(x)$ 只要求它使得微分包含(5.4.1)是适定的。需要提请读者注意如下的事实，由于适定性的假设，尽管 $\nu(x)$ 是集合值映射，但是对于一次具体的过程，状态 $x(t)$ 是一个确定的函数，而 $\omega(t)\in\upsilon(x(t))$ 是一个确定的选择。为了方便以后的证明，先给出一个引理。

引理 5.4.1 考虑含有输出微分反馈的线性系统：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Mx + N\dot{y} + Bu, \\ y &= Cx。 \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$，$u\in\mathbb{R}^m$，$y\in\mathbb{R}^r$，M，N，B，C 是维数适当的实数矩阵。如果(C,M)是可检测的，那么系统(5.4.2)存在正则的[①]渐近线性观测器。

证明：考虑系统

$$\dot{\hat{x}} = M\hat{x} + N\dot{y} + Bu + L(y - C\hat{x}), \tag{5.4.3}$$

其中 M，N，B，C 同式(5.4.2)，L 是待设计的观测器增益。

设 $\zeta=\hat{x}-Ny$，那么由式(5.4.3)可得

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= M(\zeta + Ny) + Bu + Ly - LC(\zeta + Ny) \\ &= (M - LC)\zeta + (MN + L - LCN)y + Bu, \\ \hat{x} &= \zeta + Ny。 \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

注意到(5.4.4)中的第一式的右端不再含有 $\dot{y}$。由于(C,M)是可检测的，因此存在 L 使得 $M-$

① 回忆正则系统的定义，如果一个系统是正则的，那么它的实现为常数矩阵(A,B,C,D)；或者它的传递函数作右互质分解：$G(s)=N(s)D^{-1}(s)$，如果 $D(s)$是列正则的，那么 $N(s)$的列次小于或等于 $D(s)$的列次。

LC 是 Hurwitz 矩阵。现在证明式(5.4.4)就是式(5.4.2)的状态观测器。

由于式(5.4.4)的第一式就是式(5.4.3),将式(5.4.2)减去式(5.4.3)得到 $\dot{e}=(M-LC)e$,其中 $e=x-\hat{x}$。$M-LC$ 是 Hurwitz 矩阵,因此对任意的初始条件 e_0,都有 $e(t)\to 0(t\to\infty)$。 □

如果将式(5.4.2)的第一式写成 $(I-NC)\dot{x}=Mx+Bu$,则当 $(I-NC)$ 可逆时,它就是 $\dot{x}=(I-NC)^{-1}Mx+(I-NC)^{-1}Bu$,可以设计 Luenberger 观测器。但是引理 5.4.1 没有这样做,这是一种新的观测器设计方法。引理 5.4.1 还说明,如果在系统的状态方程中出现 $N\dot{y}$,那么在线性观测器中,输出方程中会含有 Ny。

5.4.1　单变量系统

依然先从单变量系统开始。这时 $m=r=q=1$,式(5.4.1)成为

$$\begin{aligned}&\dot{x}=Ax+g\omega+bu,\\&\omega\in\nu(x),\\&y=c^{\mathrm{T}}x。\end{aligned}\tag{5.4.5}$$

设线性系统 (c^{T},A,g) 是能控和能观的,而且是相对阶为 1 的最小相位系统。这时,总可以经过适当的坐标变换,使得 (c^{T},A,g) 具有下列形式:

$$c^{\mathrm{T}}=[1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 0],\quad A=\begin{bmatrix}-a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ -a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix},\quad g=\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\\ \vdots\\ g_{n-1}\\ g_n\end{bmatrix},\tag{5.4.6}$$

其中的 $g\in\mathbb{R}^n$ 是 Hurwitz 向量,且 $g_1\neq 0$。

对式(5.4.5)中的第三个方程的两边求导,得到

$$\dot{y}=c^{\mathrm{T}}\dot{x}=c^{\mathrm{T}}(Ax+g\omega+bu)=c^{\mathrm{T}}Ax+c^{\mathrm{T}}g\omega+c^{\mathrm{T}}bu,$$

解出 ω,

$$\omega=(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}(\dot{y}-c^{\mathrm{T}}Ax-c^{\mathrm{T}}bu)=-(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}c^{\mathrm{T}}Ax-(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}c^{\mathrm{T}}bu+(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}\dot{y}。$$

代入(5.4.5)中第一式,得到

$$\begin{aligned}&\dot{x}=(A-g(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}c^{\mathrm{T}}A)x+g(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}\dot{y}+(I-g(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}c^{\mathrm{T}})bu,\\&y=c^{\mathrm{T}}x。\end{aligned}\tag{5.4.7}$$

式(5.4.7)与引理 5.4.1 中式(5.4.2)具有相同的形式,它是不含集合值映射的确定系统。

定理 5.4.1　如果线性系统 (c^{T},A,g) 是能控又能观的最小相位系统,而且它的相对阶为 1,那么 Luré 型微分包含系统(5.4.5)存在渐近的线性观测器。

证明:应用引理 5.4.1,我们只要证明 $(c^{\mathrm{T}},A-g(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}c^{\mathrm{T}}A)$ 是可检测的。

应用式(5.4.6)可以得到

$$A-g(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}c^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -a_2+\dfrac{g_2}{g_1}a_1 & -\dfrac{g_2}{g_1} & 1 & \cdots & 0\\ -a_3+\dfrac{g_3}{g_1}a_1 & -\dfrac{g_3}{g_1} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -a_n+\dfrac{g_n}{g_1}a_1 & -\dfrac{g_n}{g_1} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

它的第一行全是零。于是不能观部分对应的动态矩阵是

$$\begin{bmatrix}-\dfrac{g_2}{g_1} & 1 & \cdots & 0\\ -\dfrac{g_3}{g_1} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -\dfrac{g_n}{g_1} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}。$$

这是一个$(n-1)\times(n-1)$矩阵，它对应的特征多项式是$s^{n-1}+\dfrac{g_2}{g_1}s^{n-2}+\cdots+\dfrac{g_{n-1}}{g_1}s+\dfrac{g_n}{g_1}$，由于$g$是 Hurwitz 向量，因此这个多项式是稳定的，即$(c^{\mathrm{T}},A-g(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}c^{\mathrm{T}}A)$是可检测的。 □

为了简化表述，记$M=I-g(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}c^{\mathrm{T}}$，则(5.4.7)中第一式可以写成

$$\dot{x}=MAx+g(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}\dot{y}+Mbu。$$

应用引理 5.4.1，它的渐近线性观测器是

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}&=(MA-lc^{\mathrm{T}})\zeta+MAg(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}y+Mbu,\\ \hat{x}&=\zeta+g(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}y,\end{aligned}\tag{5.4.8}$$

其中的$l\in\mathbb{R}^n$为引理 5.4.1 中的L，它使得$(MA-lc^{\mathrm{T}})$为 Hurwitz 矩阵，而应用引理 5.4.1 中的记号，有$CN=1$。

将定理 5.4.1 和定理 5.3.2 比较是有意义的，在定理 5.3.2 中，如果将G取成g，将H取成c^{T}，要使得$(c^{\mathrm{T}},A-lc^{\mathrm{T}},g)$是正实的，那么$(c^{\mathrm{T}},A,g)$一定是最小相位的和$c^{\mathrm{T}}g\neq0$。这说明定理 5.4.1 的条件自然满足，所以一定存在渐近的线性观测器。在这个意义上说定理 5.4.1 是比 5.3 节中的结论更强的结论。

根据式(5.4.3)，观测器(5.4.8)是从

$$\dot{\hat{x}}=(MA-lc^{\mathrm{T}})\hat{x}+g(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}\dot{y}+ly+Mbu$$

演化而来的。从y到$\hat{x}$的传递函数是

$$\frac{\hat{x}(s)}{y(s)}=(sI-MA+lc^{\mathrm{T}})^{-1}(g(c^{\mathrm{T}}g)^{-1}s+l)。\tag{5.4.9}$$

式(5.4.8)是式(5.4.9)的一个实现。因此式(5.4.9)是正则的，但不是严格正则的。

下面的例子用来说明渐近线性观测器的有效性。

例 5.4.1　考虑如下的 Luré 型微分包含系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \omega,\\ \dot{x}_2 &= -0.6x_1 + 2\omega,\\ \omega &\in \nu(x),\\ y &= x_1,\end{aligned}$$

其中的集合值映射 $\nu(\cdot)$ 为

$$\nu(x) = \begin{cases} -1, & x_1 + x_2 < -2,\\ [-1, x_1 + x_2 + 1], & -2 \leqslant x_1 + x_2 < 0,\\ [x_1 + x_2 - 1, 1], & 0 \leqslant x_1 + x_2 < 2,\\ 1, & 2 \leqslant x_1 + x_2。\end{cases}$$

取它的两个选择

$$\omega_1(t) = \begin{cases} -1, & x_1 + x_2 < -2,\\ 0.5(x_1 + x_2), & -2 \leqslant x_1 + x_2 < 0,\\ 0.5(x_1 + x_2), & 0 \leqslant x_1 + x_2 < 2,\\ 1, & 2 \leqslant x_1 + x_2。\end{cases}$$

和

$$\omega_2(t) = \begin{cases} -1, & x_1 + x_2 < -2,\\ -1, & -2 \leqslant x_1 + x_2 < 0,\\ x_1 + x_2 - 1, & 0 \leqslant x_1 + x_2 < 2,\\ 1, & 2 \leqslant x_1 + x_2。\end{cases}$$

显然这两个选择是不同的。图 5.10 给出了对于相同的初始状态，$\omega_1(t)$ 和 $\omega_2(t)$ 产生的不同的状态运动(图中只给出 $x_1(t)$ 的轨线)。这个事实说明了如果采用含有集合值的状态观测器，那么它一定不可能是渐近的。

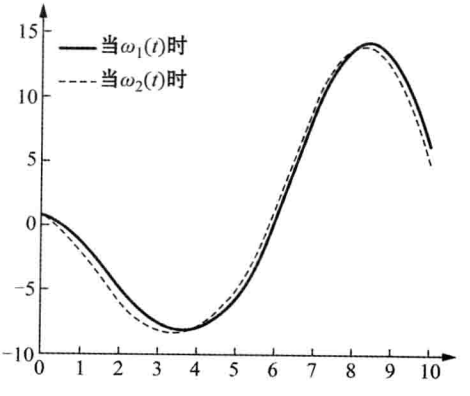


图 5.10　集合值映射的不同选择引起的状态 x_1 不同轨线

现在采用定理 5.4.1 的方法设计它的渐近线性观测器。在这个例子中

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.6 & 0\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

$$c^{\mathrm{T}}=[1\quad 0],\quad g=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}。$$

取

$$l=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\quad 则\quad MA-lc^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -3.6 & -2\end{bmatrix}$$

它的渐近线性观测器为

$$\dot{\zeta}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -3.6 & -2\end{bmatrix}\zeta+\begin{bmatrix}0\\-4.6\end{bmatrix}y,$$

$$\hat{x}=\zeta+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}y。$$

图 5.11 和图 5.12 分别给出了选择为 $\omega_1(t)$和 $\omega_2(t)$时的状态跟踪情况。从图上看，误差的收敛是很快的。 □

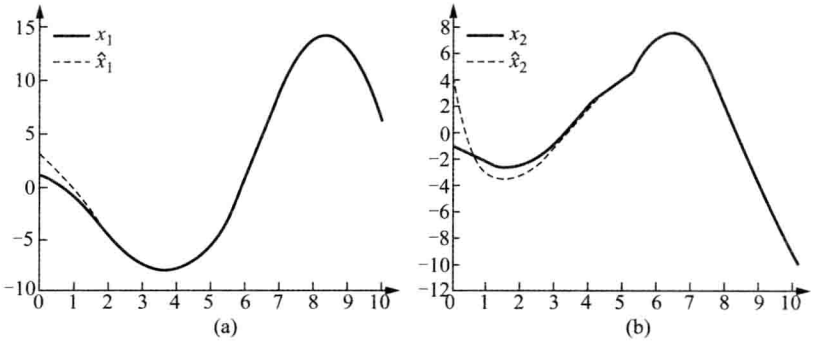


图 5.11 当选择为 $\omega_1(t)$时状态观测器的跟踪情况

(a) 为 $x_1(t)$；(b) 为 $x_2(t)$

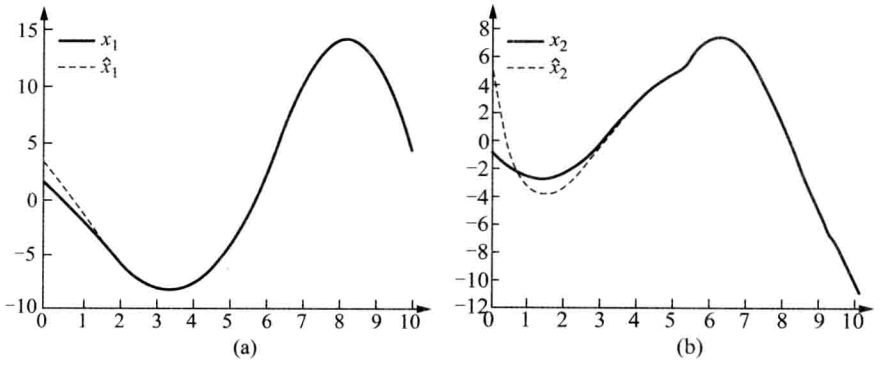


图 5.12 当选择为 $\omega_2(t)$时状态观测器的跟踪情况

(a) 为 $x_1(t)$；(b)为 $x_2(t)$

下文对相对阶不为 1 的情形做些进一步的讨论。这些讨论都可以推广到多变量的情形，但是为了不使得记号过于复杂，本节只讨论当相对阶为 2 时，单变量系统的渐近线性观测器的设计问题。

继续考虑单变量系统(5.4.5)，设系统(c^{T},A,g)是能控、能观的和最小相位的，但是其相对阶为 2，就是$c^{\mathrm{T}}g=0,c^{\mathrm{T}}Ag\neq 0$。仍然采用式(5.4.6)的标准型，这时

$$c^{\mathrm{T}}=[1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 0],\quad A=\begin{bmatrix}-a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ -a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix},\quad g=\begin{bmatrix}0\\ g_1\\ \vdots\\ g_{n-2}\\ g_{n-1}\end{bmatrix},\tag{5.4.10}$$

而 g 是 Hurwitz 向量。由式(5.4.5)的第三个式子得，$\dot{y}=c^{\mathrm{T}}Ax+c^{\mathrm{T}}bu$，$\ddot{y}=c^{\mathrm{T}}A^2x+c^{\mathrm{T}}Ag\omega+c^{\mathrm{T}}b\dot{u}+c^{\mathrm{T}}Abu$，从后者解出 ω，得到

$$\omega=(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}(\ddot{y}-c^{\mathrm{T}}A^2x-c^{\mathrm{T}}b\dot{u}-c^{\mathrm{T}}Abu)。$$

代入式(5.4.5)的第一个方程，得到

$$\dot{x}=Ax+g(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}(\ddot{y}-c^{\mathrm{T}}A^2x)+bu-g(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}b\dot{u}-g(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}c^{\mathrm{T}}Abu。$$

设 $M=I-g(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}c^{\mathrm{T}}A$，$n(u)=bu-g(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}c^{\mathrm{T}}Abu-g(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}b\dot{u}$，上述方程可以简化成

$$\dot{x}=MAx+g(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}\ddot{y}+n(u)。$$

将观测器设计成

$$\dot{\hat{x}}=MA\hat{x}+g(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}\ddot{y}+n(u)+l(y-c^{\mathrm{T}}\hat{x})。\tag{5.4.11}$$

先考察 $e=x-\hat{x}$，得到

$$\dot{e}=(MA-lc^{\mathrm{T}})e,$$

只要$(MA-lc^{\mathrm{T}})$是 Hurwitz 矩阵，即只要(c^{T},MA)是能检测的，就能使得 $e\to 0(t\to\infty)$。

当(c^{T},A,g)具有式(5.4.10)的形式的时候，不难验算，

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \dfrac{a_1g_3}{g_2} & -\dfrac{g_3}{g_2} & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \dfrac{a_1g_n}{g_2} & -\dfrac{g_n}{g_2} & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},\quad MA=\left[\begin{array}{cc:ccc}-a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -a_1^2 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ \hdashline * & * & -\dfrac{g_3}{g_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ * & * & -\dfrac{g_n}{g_2} & \cdots & 0\end{array}\right]$$

在 MA 中，左下角是不需要知道具体值的部分，右下角是

$$\begin{bmatrix}-\dfrac{g_3}{g_2} & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -\dfrac{g_{n-1}}{g_2} & 0 & \cdots & 1\\ -\dfrac{g_n}{g_2} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

它是 Hurwitz 矩阵，而正好对应着 $c^{\mathrm{T}}=[1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0]$不能观部分，因此$(c^{\mathrm{T}},MA)$是能检测的。

由式(5.4.11)可以看出，从 y 到$\hat{x}$的传递函数是

$$\frac{\hat{x}(s)}{y(s)}=(sI-MA+lc^{\mathrm{T}})^{-1}(g(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}s^2+l),$$

通常它不是正则的，因此不可能有正则的实现。如设 $\xi=\hat{x}-g(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}\dot{y}+g(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}bu$，那么由式(5.4.11)可以得到

$$\dot{\xi}=(MA-lc^{\mathrm{T}})\xi+MAg(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}\dot{y}+ly+Mbu,$$

$$\hat{x}=\xi+g(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}\dot{y}-g(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}bu。$$

这是式(5.4.5)当相对阶为 2 时的线性观测器，这时观测器的输入需要用到$\dot{y}$，即需要用到微分器。有一些文章提出当 y 和$\dot{y}$有界时，可以用高增益的反馈来构造$\dot{y}$而避免用微分器。这些研究超出本书的范围。读者如何有兴趣可以参考文献[22,23]。

用类似的方法可以讨论相对阶更大的情形，这时需要用到输出 y 的更高阶导数。

5.4.2 多变量系统

本小节的目的是将上节得到的结论推广到多变量系统，将式(5.4.1)重写于下：

$$\dot{x}=Ax+G\omega+Bu,$$

$$\omega\in\nu(x),$$

$$y=Cx,$$

并设 $r=q$。

定理 5.4.2 如果线性系统式(5.4.1)中(C,A,G)是能控又能观的最小相位系统，而且其相对阶为 1，那么它存在渐近的线性观测器。

证明：根据 5.2 节的结论，由于 $r=q$，因此相对阶为 1 意味着 CG 是可逆矩阵。对式(5.4.1)的第三个方程两边求导，得到$\dot{y}=CAx+CG\omega+CBu$。解出 ω，得到

$$\omega=(CG)^{-1}(\dot{y}-CAx-CBu),$$

代入到式(5.4.1)的第一个方程，得到

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+G(CG)^{-1}(\dot{y}-CAx-CBu)+Bu\\&=[A-G(CG)^{-1}CA]x+G(CG)^{-1}\dot{y}+[B-G(CG)^{-1}CB]u\\&=MAx+G(CG)^{-1}\dot{y}+MBu,\end{aligned}$$

其中 $M=I-G(CG)^{-1}C$。根据引理 5.4.1，只要证明(C,MA)是可检测的，那么就存在线性的渐近观测器。

根据 5.2 节的讨论，CG 是可逆矩阵蕴含(C,A,G)可以具有下列形式：

$$C=[C_1\quad 0],\quad A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix},$$

其中 I 是 $m\times m$ 的单位矩阵，C_1 是可逆的方阵；进一步，(C,A,G)是最小相位系统的意味 A_{22} 是 Hurwitz 矩阵。可以直接验算得到

$$M = I - G(CG)^{-1}C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad MA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}。$$

A_{22} 正好是 (C,MA) 不能观部分的动态矩阵，而它是 Hurwitz 矩阵，因此 (C,MA) 是可检测的。□

熟悉线性系统理论的读者不难发现，定理 5.4.2 中的关于能控性假设实际是不必要的。

类似于单变量情形的讨论，我们可以推导当相对阶都是 2 时的线性渐近观测器的构造，这时在观测器的输入中将出现输出 y 的导数 $\dot{y}$ 项。我们将它留给读者。

在结束本节的时候，我们再稍微讨论线性观测器的降维观测器的设计问题。可以想象如果系统存在全维观测器，那么应该也存在降维观测器，现在就证明这个事实。

推论 5.4.1　如果线性系统(5.4.1)是能控又能观的最小相位系统，而且它的相对阶为 1，那么它存在 $n-r$ 维的线性的渐近观测器。

证明：可以认为系统(5.4.1)具有如下的形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}\omega + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}u,$$

$$y = x_1。$$

其中状态的第二个分量满足

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u = A_{21}y + A_{22}x_2 + B_2u。$$

注意到系统是最小相位的，因此 A_{22} 是 Hurwitz 矩阵。可以简单地构造 x_2 的线性观测器

$$\dot{\hat{x}}_2 = A_{21}y + A_{22}\hat{x}_2 + B_2u。$$

那么设 $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$，就有 $\dot{e}_2 = A_{22}e_2$，对任意的初始状态 $e_2 \to 0(t \to \infty)$。□

注意在上述证明中，我们并不需要能观性条件，系统的最小相位保证了它的可检测性。从推论 5.4.1 的证明可以看出，降维观测器的设计要比全维观测器简单得多，它不需要解出集合值映射的输出 ω，产生这种便利的原因是 (C,A,G) 的相对阶为 1，输出可以全面反映集合值输出 ω 的不确定性。读者可以试着讨论相对阶大于 1 的情形。

练习

1. 在相对阶为 2 的情形中，如果将观测器设计成

$$\dot{\hat{x}} = MA\hat{x} + g(c^{\mathrm{T}}Ag)^{-1}\ddot{y} + n(u) + l(y - c^{\mathrm{T}}\hat{x}) + k(\dot{y} - c^{\mathrm{T}}\dot{\hat{x}})。$$

试分析使得观测偏差 $e = x - \hat{x}$ 趋于 0 的条件。

2. 考虑 Luré 系统式(5.4.1)，其中 $r = q$。如果 $CG = 0$，$\det CAG \neq 0$，应用单变量时的讨论，试设计它的线性渐近观测器。

3. 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c^{\mathrm{T}} = [1 \quad 0], \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}。$$

试设计线性观测器和降维的线性观测器。

4. 将推论 4.3.1 推广到多变量系统。

5. 应用本节提出的方法，试讨论式(5.3.1)描述系统的线性观测器。

5.5 Luré 型微分包含系统的 Luenberger 型自适应观测器

本节将前面两节的结论推广到含参数的 Luré 型微分包含系统，建立这类微分包含系统的自适应观测器。在自适应控制理论中，考虑的对象都具有不确定性，而且这种不确定可以归结为一个未知的或者缓变的参数(可以是向量)，设计内容是一个参数的估计模型和一个含有参数的控制律来达到控制目的，前者称为自适应律。在自适应控制设计中并不要求参数的估计值收敛到真值，但是要求这个控制律可以达到预定的控制目标。

本节考虑如下的含参数的 Luré 型微分包含系统

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu - G\omega + f(x,u)\theta, \\ &\omega \in \nu(Hx), \\ &y = Cx, \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$，$u\in\mathbb{R}^m$，$y\in\mathbb{R}^r$，$\omega\in\mathbb{R}^q$，分别是系统的状态、输入、输出和集合值映射的输出。A,B,G,C,H 是维数适当的实数矩阵。要求集合值映射 $\nu(x)$ 使得系统(5.5.1)是适定的。$\theta\in\mathbb{R}^p$ 是未知的参数(向量)，通常假定它是不变的或者是缓变的，但是知道它的界，即存在 γ_1 使得 $\|\theta\|\leqslant\gamma_1$；$f(x,u)$ 是一个已知的 $n\times p$ 函数矩阵，假定关于 x 满足 Lipschitz 条件，而且对 u 是一致的，即存在 γ_2，使得

$$\|f(x_1,u)-f(x_2,u)\| \leqslant \gamma_2\|x_1-x_2\|。$$

5.5.1 Luenberger 型自适应观测器

如果系统(5.5.1)存在渐近观测器，那么当 $\theta\equiv 0$ 时也应该存在状态观测器。因此根据定理 5.3.1，下列条件对于观测器设计是基本的。

(1) 存在 L 使得 $(H,A-LC,G)$ 是能控能观的和严格正实的；

(2) $\nu(\cdot)$ 是单调的；

(3) 微分包含(5.3.4)的解存在。

根据定理 5.3.2，这时必然有：$HG>0$，从而 H 是行满秩的，而 G 是列满秩的。我们下面要研究的是还需要增加什么条件，便可以设计自适应观测器。

本节较多地用到范数，先回忆在本书 1.1 节提及的一个事实：有限维空间的任意两个范数等价(定理 1.1.1)。设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的一个线性映射，那么对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$ 成立 $\|Tx\|_2\leqslant\|T\|_d\|x\|_1$，这里的 $\|x\|_1$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的某一种范数，$\|Tx\|_2$ 可以是 $\mathbb{R}^n$ 的另一种范数，而 $\|T\|_{r(2,1)}$ 就是由 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 诱导出的算子范数。如果 $\|x\|_1$ 和 $\|Tx\|_2$ 都取 Euclid 范

数，那么 $\| T \|_{r(2,1)} = \sqrt{\lambda_{\max}(T^{\mathrm{T}}T)}$，这个范数称为谱范数，记成 $\| T \|_{\mathrm{P}}$。当 $\| x \|_1$ 或 $\| Tx \|_2$ 取其他范数的时候，诱导出来的范数 $\| T \|_{\mathrm{P}}$ 是等价的。设 $\| T \|_c$ 是 T 作为 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 元素的另一个范数[①]，它可以与诱导范数 $\| T \|_{r(2,1)}$ 不同，但是对一切 $x\in\mathbb{R}^n$ 也成立 $\| Tx \|_2 \leqslant \| T \|_c \| x \|_1$，那么这个范数 $\| T \|_c$ 就称为与 $\| \cdot \|_1$ 和 $\| \cdot \|_2$ 相容的范数。已知当 $\| x \|_1$ 和 $\| Tx \|_2$ 都取 Euclid 范数的时候，Frobenius 范数

$$\| T \|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}^2}$$

是一种与 Euclid 范数相容的范数。

以下如不是特别说明都假定向量 x 取 Euclid 范数，而作为算子 T 取谱范数或者 Frobenius 范数。

受 5.3 节启发，考虑如下的动态系统(5.5.2)

$$\begin{aligned} &\dot{\hat{x}} = (A-LC)\,\hat{x} + Bu - G\hat{\omega} + f(\hat{x},u)\,\hat{\theta} + Ly, \\ &\hat{\omega} \in \nu(H\hat{x}), \\ &\dot{\hat{\theta}} = h(\hat{x},u)(y - C\hat{x}), \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

其中 $h(\hat{x},u)$ 是 $p\times r$ 的待设计矩阵。这一小节要讨论在什么条件下，式(5.5.2)能够成为式(5.5.1)的自适应渐近观测器。其中的 $\hat{\theta}$ 为一个时变的参数，称为自适应参数，用来估计未知参数 θ。前文已经提及式(5.5.2)中的第三个方程称为自适应律。

根据定理 5.3.1，对不含不确定项 $f(x,u)\theta$ 的系统(5.3.1)，存在 Luenberger 观测器的条件是存在 L 使得 $(H, A-LC, G)$ 是严格正实的，即存在正定矩阵 P 和 Q，使得

$$P(A-LC) + (A-LC)^{\mathrm{T}}P = -Q \quad 和 \quad G^{\mathrm{T}}P = H。 \tag{5.5.3}$$

引理 5.3.2 和定理 5.3.2 讨论了方程(5.5.3)有解的充分必要条件。

分别用 $\lambda_{\max}(P)$ 和 $\lambda_{\min}(Q)$ 表示 P 的最大特征值和 Q 的最小特征值。我们有如下的定理。

定理 5.5.1　如果

(1) 存在 L 使得 $(H, A-LC, G)$ 是能控能观的和严格正实的；

(2) $\nu(\cdot)$ 是单调的；

(3) 微分包含式(5.3.4)的解存在；

(4) $\lambda_{\min}(Q) > 2\gamma_1\gamma_2\lambda_{\max}(P)$，其中 γ_1 和 γ_2 的定义在本节开头处给出；

(5) 存在 $h(x,u)$，使得 $h(x,u)C = [Pf(x,u)]^{\mathrm{T}}$。

其中的 P 和 Q 满足式(5.5.3)，那么式(5.5.2)是 Luré 微分包含(5.5.1)的一个自适应渐近观测器。

证明：将(5.5.1)中第一式减去(5.5.2)中的第一式，得到

① 在定义矩阵范数的时候，为了与诱导算子范数一致，会增加一个条件 $\| AB \| \leqslant \| A \| \| B \|$，这对于向量来讲是不需要的(参阅本书第 1 章)。

$$\begin{aligned}&\dot{e}=(A-LC)e-G(\omega-\hat{\omega})+f(x,u)\theta-f(\hat{x},u)\,\hat{\theta},\\&\omega\in\nu(Hx),\\&\hat{\omega}\in\nu(H\hat{x})。\end{aligned}\tag{5.5.4}$$

考虑如下的V函数：

$$V(e,\tilde{\theta})=e^{\mathrm{T}}Pe+\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\,\tilde{\theta},$$

其中的$\tilde{\theta}=\theta-\hat{\theta}$。沿着系统(5.5.4)的轨线，$V$对时间的导数是

$$\begin{aligned}\dot{V}=&e^{\mathrm{T}}(A-LC)^{\mathrm{T}}Pe+e^{\mathrm{T}}P(A-LC)e-\\&(\omega-\hat{\omega})^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}Pe-e^{\mathrm{T}}PG(\omega-\hat{\omega})+\\&\theta^{\mathrm{T}}f^{\mathrm{T}}(x,u)Pe+e^{\mathrm{T}}Pf(x,u)\theta-\\&\hat{\theta}^{\mathrm{T}}f^{\mathrm{T}}(\hat{x},u)Pe-e^{\mathrm{T}}Pf(\hat{x},u)\,\hat{\theta}-\\&2\,\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\dot{\hat{\theta}},\end{aligned}$$

这里应用了$\dot{\theta}=0$。我们来逐行地分析$\dot{V}$。首先，根据正实性引理，

$$e^{\mathrm{T}}(A-LC)^{\mathrm{T}}Pe+e^{\mathrm{T}}P(A-LC)e=-e^{\mathrm{T}}Qe<0,\quad(e\neq0)。$$

其次，由于$G^{\mathrm{T}}P=H$，因此

$$(\omega-\hat{\omega})^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}Pe=(\omega-\hat{\omega})^{\mathrm{T}}He=(\omega-\hat{\omega})^{\mathrm{T}}(Hx-H\hat{x}),$$

$\nu(\cdot)$是单调的，因而

$$-(\omega-\hat{\omega})^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}Pe\leqslant0。$$

再次，分析第三行和第四行，其两项是相等的，采用其后项，

$$\begin{aligned}&e^{\mathrm{T}}Pf(x,u)\theta-e^{\mathrm{T}}Pf(\hat{x},u)\,\hat{\theta}\\=&e^{\mathrm{T}}Pf(x,u)\theta-e^{\mathrm{T}}Pf(\hat{x},u)\theta+e^{\mathrm{T}}Pf(\hat{x},u)\theta-e^{\mathrm{T}}Pf(\hat{x},u)\,\hat{\theta}\\=&e^{\mathrm{T}}P[f(x,u)-f(\hat{x},u)]\theta+e^{\mathrm{T}}Pf(\hat{x},u)\,\tilde{\theta},\end{aligned}$$

其中的第一项成立

$$\begin{aligned}&e^{\mathrm{T}}P[f(x,u)-f(\hat{x},u)]\theta\\\leqslant&\|\,e^{\mathrm{T}}P[f(x,u)-f(\hat{x},u)]\theta\,\|\\\leqslant&\gamma_1\,\|\,e^{\mathrm{T}}P[f(x,u)-f(\hat{x},u)]\,\|\\\leqslant&\gamma_1\,\|\,e^{\mathrm{T}}\sqrt{P}\,\|\,\|\,\sqrt{P}[f(x,u)-f(\hat{x},u)]\,\|\\\leqslant&\gamma_1\gamma_2\,\|\,e^{\mathrm{T}}\sqrt{P}\,\|\,\|\,\sqrt{P}\,\|\,\|\,e\,\|\\\leqslant&\gamma_1\gamma_2\lambda_{\max}(P)e^{\mathrm{T}}e,\end{aligned}$$

其中，应用了$\|\sqrt{P}[f(x,u)-f(\hat{x},u)]\|\leqslant\|\sqrt{P}\|\,\|f(x,u)-f(\hat{x},u)\|\leqslant\gamma_2\|\sqrt{P}\|\,\|e\|$，而$\|\sqrt{P}\|$是$\sqrt{P}$的谱范数。而第二项

$$e^{\mathrm{T}}Pf(x,u)\,\tilde{\theta}=\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}f^{\mathrm{T}}(x,u)Pe=\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}h(x,u)Ce=\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}h(x,u)(y-C\hat{x})=\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\,\dot{\hat{\theta}},$$

与第五行抵消。

因此

$$\dot{V} \leqslant -e^{\mathrm{T}}[Q-2\gamma_1\gamma_2\lambda_{\max}(P)I]e < 0。$$

记 $Q-2\gamma_1\gamma_2\lambda_{\max}(P)I=N$，$N$ 是一个正定矩阵。对任意的 $t>0$，有

$$\int_0^t e^{\mathrm{T}}Ne\,\mathrm{d}\tau \leqslant -\int_0^t \dot{V}\mathrm{d}\tau = V(0)-V(t) < V(0) < \infty。$$

系统的适定性保证了 e 是绝对连续的，因此由 Barbalet 引理②和 N 是正定矩阵，可得 $e\to 0(t\to\infty)$。 □

对定理 5.5.1 有如下的注释。

注 1　定理 5.5.1 中的条件(4)是根据对 $e^{\mathrm{T}}P[f(x,u)-Pf(\hat{x},u)]\hat{\theta}$ 的估计得到的。对它采用不同的估计会得到不同的条件。例如

$$\begin{aligned}
&\| e^{\mathrm{T}}P[f(x,u)-f(\hat{x},u)]\hat{\theta}\| \\
\leqslant&\gamma_1\| e^{\mathrm{T}}P[f(x,u)-f(\hat{x},u)]\| \\
\leqslant&\frac{1}{2}\gamma_1\| e^{\mathrm{T}}P\|^2+\frac{1}{2}\gamma_1\| f(x,u)-f(\hat{x},u)\|^2 \\
\leqslant&\frac{e^{\mathrm{T}}\gamma_1P^2e}{2}+\frac{\gamma_1\gamma_2^2e^{\mathrm{T}}e}{2},
\end{aligned}$$

于是条件(4)就可以改成

$$\lambda_{\min}(Q) > \gamma_1\lambda_{\max}(P^2)+\gamma_1\gamma_2^2。$$

从上面的不等式还可以将定理的条件(4)写成

$$P(A-LC)+(A-LC)^{\mathrm{T}}P-\gamma_1P^2-\gamma_1\gamma_2^2I<0,$$

或者矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} P(A-LC)+(A-LC)^{\mathrm{T}}P-\gamma_1\gamma_2^2I & P \\ P & -\dfrac{1}{\gamma_1}I \end{bmatrix} < 0。$$

注意到这是一个线性矩阵不等式。 □

注 2　条件(5)中的 $h(x,u)C=[Pf(x,u)]^{\mathrm{T}}$ 就是 $Pf(x,u)=C^{\mathrm{T}}h^{\mathrm{T}}(x,u)$，根据 Cramer 定理，方程存在解 $h(x,u)$ 的充分必要条件是 $\mathrm{rank}C^{\mathrm{T}}=\mathrm{rank}[C^{\mathrm{T}}\quad Pf(x,u)]$，就是 $\mathrm{span}C^{\mathrm{T}}\supset \mathrm{span}Pf(x,u)$。所以必须对一切 x,u 成立 $\mathrm{rank}f(x,u)\leqslant r$，或者说 $p\leqslant r$ 是必要条件。

进一步，总可以将 C 写成 $C=[I\quad 0]$，相应地，$P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22}\end{bmatrix}$，$f(x,u)=\begin{bmatrix}f_1(x,u)\\ f_2(x,u)\end{bmatrix}$。那么 $h(x,u)C=[Pf(x,u)]^{\mathrm{T}}$ 就是

$$[h(x,u)\quad 0]=[f_1(x,u)P_{11}+f_2(x,u)P_{12}^{\mathrm{T}}\quad f_1(x,u)P_{21}+f_2(x,u)P_{22}],$$

即 $f_2(x,u)=-f_1(x,u)P_{21}P_{22}^{-1}$。因此如果此式满足，$h(x,u)$ 总存在。 □

② Barbalet 引理：如果 $f(t)$ 是一致连续的，$\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t$ 存在，则 $f(t)\to 0(t\to\infty)$。参阅文献[14]。

注 3 在大多数的自适应控制系统设计理论中，都将未知参数 θ 前的增益矩阵 $f(x,u)$ 设为常数矩阵，并认为就是 B 或者 G（参阅自适应控制方面的教材），在那里，条件(5)是通过正实性实现的。 □

5.5.2 Luenberger 型自适应降维观测器

自适应观测器也存在降维观测器设计问题。

定理 5.5.2 如果系统(5.5.1)满足

(1) 存在 L 使得 $(H,A-LC,G)$ 是能控能观的和严格正实的；

(2) $\nu(\cdot)$ 是单调的；

(3) 微分包含式(5.3.4)的解存在；

(4) 存在 $h(x,u)$ 使得 $h(x,u)C=[Pf(x,u)]^{\mathrm{T}}$；

那么，系统(5.5.1)存在一个 $n-r$ 维的降维自适应渐近观测器。

证明：将式(5.5.1)写成

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}u-\begin{bmatrix}G_1\\ G_2\end{bmatrix}\omega+\begin{bmatrix}f_1(x,u)\\ f_2(x,u)\end{bmatrix}\theta,$$

$$\omega\in\nu(Hx),$$

$$y=x_1。$$

根据定理 5.5.1 的条件(1)，存在 $P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}$，使得

$$\begin{aligned}&P(A-LC)+(A-LC)^{\mathrm{T}}P\\ &=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}-L_1 & A_{12}\\ A_{21}-L_2 & A_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_{11}^{\mathrm{T}}-L_1^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}}-L_2^{\mathrm{T}}\\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}\\ &=-\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{21} & Q_{22}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中 $Q=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{21} & Q_{22}\end{bmatrix}$，$L=\begin{bmatrix}L_1\\ L_2\end{bmatrix}$。于是

$$P_{21}A_{12}+P_{22}A_{22}+A_{12}^{\mathrm{T}}P_{12}+A_{22}^{\mathrm{T}}P_{22}=-Q_{22}。$$

就是

$$P_{22}(P_{22}^{-1}P_{21}A_{12}+A_{22})+(A_{12}^{\mathrm{T}}P_{12}P_{22}^{-1}+A_{22}^{\mathrm{T}})P_{22}=-Q_{22}。$$

这说明 $P_{22}^{-1}P_{21}A_{12}+A_{22}$ 是 Hurwitz 矩阵。

其次，由于

$$[G_1^{\mathrm{T}}\quad G_2^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}=[H_1\quad H_2],$$

所以 $G_1^{\mathrm{T}}P_{12}+G_2^{\mathrm{T}}P_{22}=H_2$，就是$(G_1^{\mathrm{T}}P_{12}P_{22}^{-1}+G_2^{\mathrm{T}})P_{22}=H_2$。这说明$(H_2,A_{22}+P_{22}^{-1}P_{12}A_{12},G_2+P_{22}^{-1}P_{12}G_1)$是严格正实的。

由条件(3)，$h(x,u)C=[Pf(x,u)]^{\mathrm{T}}$，得到

$$[f_1^{\mathrm{T}}(x,u)\quad f_2^{\mathrm{T}}(x,u)]\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{21}&P_{22}\end{bmatrix}=[h(x,u)\quad 0],$$

即 $f_1^{\mathrm{T}}(x,u)P_{12}+f_2^{\mathrm{T}}(x,u)P_{22}=0$，$f_1^{\mathrm{T}}(x,u)P_{12}P_{22}^{-1}+f_2^{\mathrm{T}}(x,u)=0$。

设 K 使得 $K=P_{22}^{-1}P_{12}$，$z_2=x_2+Kx_1=x_2+Ky$，那么

$$\begin{aligned}\dot{z}_2&=\dot{x}_2+K\dot{x}_1\\&=(A_{12}+KA_{11})x_1+(A_{22}+KA_{12})x_2+(B_2+KB_1)u-\\&\quad(G_2+KG_1)\omega+(f_2(x,u)+Kf_1(x,u))\theta,\end{aligned}$$

注意到 $f_2(x,u)+Kf_1(x,u)=0$，构造观测器

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}_2&=(A_{22}+KA_{12})\hat{z}_2+(B_2+KB_1)u-(G_2+KG_1)\hat{\omega}+\\&\quad[(A_{21}+KA_{11})+(A_{22}+KA_{22})K]y。\end{aligned}$$

设 $e_2=z_2-\hat{z}_2$，那么

$$\dot{e}_2=(A_{22}+KA_{12})e+(G_2+KG_1)(\omega-\hat{\omega}),\quad(\omega-\hat{\omega})\in\nu(Hx)-\nu(H\hat{x})。$$

应用定理 5.3.1，可以得到 $e\to 0(t\to\infty)$。 □

定理 5.3.2 给出了降维自适应观测器的优势，首先它不需要定理 5.3.1 的条件(4)，其次当采用降维观测器的时候，不再需要自适应律。降维观测器之所以能够具有这样的优势，是因为充分利用了输出包含的系统中包含的不确定信息，其次条件 $h(x,u)C=[Pf(x,u)]^{\mathrm{T}}$ 是很重要的，它相当于正实性引理中的 $PB=C^{\mathrm{T}}$，将输入增益 $f(x,u)$ 与输出增益 C 联系起来了。

5.5.3　自适应观测器仿真例子

本小节给出一个数值仿真例子来说明自适应观测器的设计过程，特别希望验证降维观测器设计中不需要自适应律，这个优势对于不确定系统的设计来讲具有重要意义。

例 5.5.1　考虑下列 Luré 系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10&-3&-1\\6&-5&4\\1&0&-9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\omega+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}0.6\sin x_3\\0\\0\end{bmatrix}\theta,$$

$$y=x_1。$$

集合值映射是

$$\begin{aligned}&\nu(x_1+3x_2+2x_3)\\&=\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+3\mathrm{sgn}(x_1+3x_2+2x_3), & x_1+3x_2+2x_3\neq 0,\\ [-3,3], & x_1+3x_2+2x_3=0。\end{cases}\end{aligned}$$

设$|\theta|\leqslant 2$，即$\gamma_1=2$；可以计算出$\gamma_2=0.6$。

取$l=[-6\quad 2\quad 1]^{\mathrm{T}}$，那么

$$A-lc^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-4 & -3 & -1\\ 4 & -5 & 4\\ 0 & 0 & -9\end{bmatrix}。$$

可以算出

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0.5\\ 0 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}8 & -1 & -1\\ -1 & 10 & 3\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix},$$

以及$\lambda_{\min}(Q)=3.5401>3.1236=2\gamma_1\gamma_2\lambda_{\max}(P)$。

解$[Pf(x,u)]^{\mathrm{T}}=[0.6\sin x_3\quad 0\quad 0]=[h(x)\quad 0\quad 0]$，得$h(x)=0.6\sin x_3$。

因此观测器可以是

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -3 & -1\\ 4 & -5 & 4\\ 0 & 0 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}\hat{\omega}+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}0.6\sin\hat{x}_3\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\hat{\theta}+\begin{bmatrix}-6\\ 2\\ 1\end{bmatrix}y,$$

$$\hat{\omega}\in\nu(\hat{x}_1+3\hat{x}_2+2\hat{x}_3)$$

$$=\begin{cases}\hat{x}_1+3\hat{x}_2+2\hat{x}_3+3\mathrm{sgn}(\hat{x}_1+3\hat{x}_2+2\hat{x}_3), & \hat{x}_1+3\hat{x}_2+2\hat{x}_3\neq 0,\\ [-3,3], & \hat{x}_1+3\hat{x}_2+2\hat{x}_3=0。\end{cases}$$

自适应律是

$$\dot{\hat{\theta}}=0.6\sin\hat{x}_3(y-x_1)。$$

在仿真中，取$\theta=2$。

从图5.13可以看出，观测器工作良好，估计状态都很快地收敛到真实状态。尤其要注意到参数θ的估计值$\hat{\theta}$并没有收敛到真值2。

根据定理5.5.2，由于$P_{12}=0$，因此$K=0$，$\hat{x}_2=\hat{z}_2$。它的降维观测器可以是

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 4\\ 0 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}\hat{\omega}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}6\\ 1\end{bmatrix}y,$$

$$\hat{\omega}\in\nu(y+3\hat{x}_2+2\hat{x}_3)$$

$$=\begin{cases}y+3\hat{x}_2+2\hat{x}_3+3\mathrm{sgn}(y+3\hat{x}_2+2\hat{x}_3), & y+3\hat{x}_2+2\hat{x}_3\neq 0,\\ [-3,3], & y+3\hat{x}_2+2\hat{x}_3=0。\end{cases}$$

降维观测器不含对参数的估计。图5.14给出降维观测器的工作情况，收敛结果也是令人满意的。□

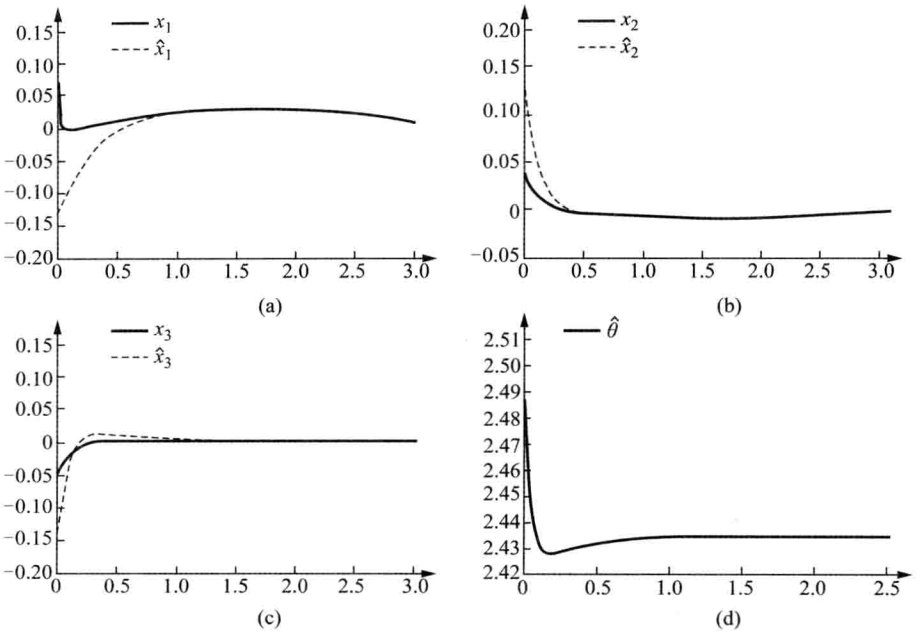


图 5.13　例 5.5.1 的仿真结果

(a),(b),(c)分别是状态 x_1, x_2, x_3 的跟踪情况;(d)$\hat{\theta}$的估计

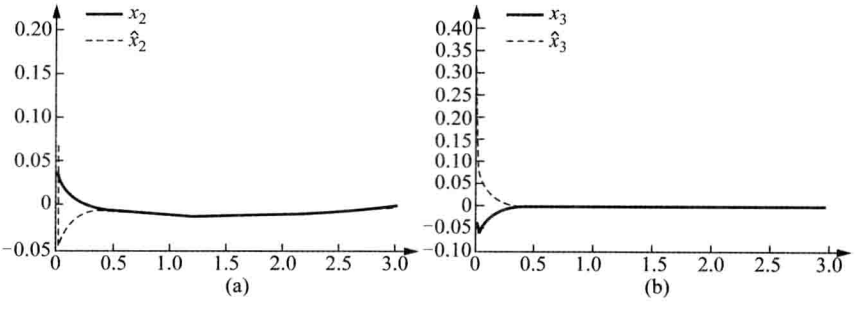


图 5.14　例 5.5.1 中降维观测器的工作情况

练习

1. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\|A\|$ 是任意一种矩阵范数,那么一定存在$\mathbb{R}^n$的一种范数 $\|x\|$,使得 $\|A\|$ 是由 $\|x\|$ 诱导出来的范数。

2. 已知

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 3 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\omega+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\theta$$

$$\nu(x)=\begin{cases}x_1+\operatorname{sgn}(x_1), & x_1\neq 0,\\ [-1,1], & x_1=0,\end{cases}$$

$$y=x_1。$$

试设计它的观测器和降维观测器。

3. 对 $e^{\mathrm{T}}P[f(x,u)-f(\hat{x},u)]\hat{\theta}$进行估计，得出与定理 5.5.1 和其后注 1 不同的结论。

4. 考虑系统

$$\begin{aligned}&\dot{x}=Ax+B(x)u-G\omega+f(x,u)\theta,\\&\omega\in\nu(Hx),\\&y=Cx,\end{aligned}$$

存在自适应观测器的条件，其中 $B(x)$满足 Lipschitz 条件，即存在常数 γ_3 使得

$$\|B(x_1)-B(x_2)\|\leqslant\gamma_3\|x_1-x_2\|。$$

进一步考虑输入 $B(x)u$ 写成 $B(x,u)$情形。

5. 如果将观测器设定成

$$\begin{aligned}&\dot{\hat{x}}=(A-LC)\hat{x}+Bu-G\hat{\omega}+f(\hat{x},u)\hat{\theta}+Ly,\\&\hat{\omega}\in\nu(H\hat{x}+C\hat{x}-y),\\&\dot{\hat{\theta}}=h(\hat{x},u)(y-C\hat{x}),\end{aligned}$$

建立观测器存在的条件。

6. 改写定理 5.5.3，将条件(2)改成矩阵不等式。

7. 讨论定理 5.5.1 中的条件 $h(x,u)C=[Pf(x,u)]^{\mathrm{T}}$，其中 $f(x,u)$是一个 $n\times q$ 的函数矩阵。要使得 $h(x,u)C=[Pf(x,u)]^{\mathrm{T}}$ 成立，必要条件是 $q\leqslant r$。如果 $f(x,u)=Ef_1(x,u)$，$E\in\mathbb{R}^{n\times q}$，设 $h(x,u)=f_1^{\mathrm{T}}(x,u)F$，于是上述方程成为 $FC=E^{\mathrm{T}}P$。则定理 5.5.1 的条件(1)和条件(5)就是存在 $F\in\mathbb{R}^{q\times r}$和 $L\in\mathbb{R}^{n\times r}$，使得

$$\left(\begin{bmatrix}H\\FC\end{bmatrix},(A-LC),[G\ \ E]\right)$$

是严格正实的。给出一些使$\left(\begin{bmatrix}H\\FC\end{bmatrix},(A-LC),[G\ \ E]\right)$严格正实的必要条件。

5.6　Luré 型微分包含系统的线性自适应观测器

这一节讨论含有未知参数的 Luré 微分包含的线性自适应观测器设计问题。考虑式(5.6.1)所描述的系统，它与系统(5.5.1)的区别在于非线性项 $f(x,u)$ 换成了 $f(y,u)$，因此它可以认为是系统(5.5.1)的特例。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu - G\omega - f(y,u)\theta,\\ \omega &\in \nu(x),\\ y &= Cx,\end{aligned} \tag{5.6.1}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$，$u\in\mathbb{R}^m$，$y\in\mathbb{R}^r$，$\omega\in\mathbb{R}^r$，分别是系统的状态、输入、输出和集合值映射的输出，依然假定 ω 和 y 具有相同的维数，A,B,G,C,H 是维数适当的实数矩阵；本节也不作 $\nu(x)$ 是单调性的假定，但要求集合值映射 $\nu(x)$ 使得系统(5.6.1)是适定的。$\theta\in\mathbb{R}^p$ 是时不变的或者是缓变的未知的参数(向量)，假设它是有界的，即存在 γ_1 使得 $\|\theta\|\leqslant\gamma_1$；$f(y,u)$ 是一个已知的函数矩阵，假定它的所有元素都是分段连续的。

本节的练习 1 给出了引理 5.4.1 在自适应系统下的推广。但是，读者不妨尝试，直接用本节练习 1 的结果，很难将线性观测器的设计技术推广到微分包含系统的自适应观测器设计。在微分包含系统(5.6.1)中，将集合值映射的输出 ω 解出后，练习 1 中的条件 $h(x,u)C=f^{\mathrm{T}}(x,u)P$ 成为 $h(x,u)C=f^{\mathrm{T}}(x,u)M^{\mathrm{T}}P$，其中 M 的意义参阅本章 5.4 节，而因为 M 是不满秩的，所以这个方程一般不可解，除非对函数矩阵 $f(x,u)$ 的秩做较强的限制。因此我们需要另外寻找 Luré 型微分包含系统的线性观测器的设计技术，本节将提出一种自适应观测器的设计方法，为了保证其收敛性，我们需要引进一个新的概念。

5.6.1　持续激励

在控制系统辨识的理论中，持续激励是一类重要的信号，因为它变化是持续的，常在参数辨识中作为统计量收敛的条件。本节仅介绍持续激励的一些最基本的性质，特别是讨论了它与函数的线性无关及系统稳态输出之间的关系，需要进一步了解持续激励的其他性质可以参考有关系统辨识的教材。

定义 5.6.1　设 $\varphi:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是一个分段连续的向量值映射。φ 称为是 $[0,\infty)$ 上的一个 n 维的**持续激励**，如果存在正数 $0<k_1\leqslant k_2<\infty$ 和正数 M，使得对一切 $t\in[0,\infty)$，成立

$$k_1 I \leqslant \int_t^{t+M}\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant k_2 I, \tag{5.6.2}$$

式(5.6.2)中 I 是 n 阶单位矩阵，参数 k_1 被称为 φ 的激励水平。　□

式(5.6.2)中涉及的积分可以认为是在 Lebesgue 意义上的。

在控制系统设计理论中,我们更多的是关心一个系统的输出是持续激励的。为此考虑下面的例子。

例 5.6.1 考虑线性系统,其传递函数为

$$G(s)=\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}。$$

设输入为单位阶跃信号 $u(s)=\dfrac{1}{s}$,即 $u(t)=1(t\geqslant 0)$,这时的输出为

$$y(t)=\begin{bmatrix}1\\ 1-\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}。$$

考虑

$$y(t)y^{\mathrm{T}}(t)=\begin{bmatrix}1 & 1-\mathrm{e}^{-t}\\ 1-\mathrm{e}^{-t} & 1-2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{e}^{-t}\\ -\mathrm{e}^{-t} & -2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix},$$

在最后的等式中,前一项称为稳态项,后一项称为暂态项,因为当 $t\to\infty$ 时,它趋向 0。计算

$$\begin{bmatrix}\displaystyle\int_t^{t+M}1\mathrm{d}\tau & \displaystyle\int_t^{t+M}(1-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}\tau\\ \displaystyle\int_t^{t+M}(1-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}\tau & \displaystyle\int_t^{t+M}(1-2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{d}\tau\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\displaystyle\int_t^{t+M}1\mathrm{d}\tau & \displaystyle\int_t^{t+M}1\mathrm{d}\tau\\ \displaystyle\int_t^{t+M}1\mathrm{d}\tau & \displaystyle\int_t^{t+M}1\mathrm{d}\tau\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\displaystyle\int_t^{t+M}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}\tau\\ -\displaystyle\int_t^{t+M}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}\tau & \displaystyle\int_t^{t+M}(-2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{d}\tau\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}M & M\\ M & M\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \mathrm{e}^{-(t+M)}-\mathrm{e}^{-t}\\ \mathrm{e}^{-(t+M)}-\mathrm{e}^{-t} & \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-2(t+M)}}{2}\end{bmatrix}。$$

由于第二项当 $t\to\infty$ 时趋向于 0,因此这一项在估计不等式(5.6.2)时可以不予考虑,这个事实在控制系统理论常说成:"去掉指数衰减项不会影响对否是为持续激励的判断。"对任意的 M,第一项不会是正定的,因此这时的输出 $y(t)$ 不是持续激励。

再考虑输入信号为 $u(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$,即 $u(t)=\sin t(t\geqslant 0)$,这时,

$$y(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ \dfrac{\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{2}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2}\end{bmatrix}。$$

根据上面的说明，去掉一个指数衰减项不会影响对持续激励的判别，因此我们只要对下式进行验证：

$$\begin{bmatrix} \sin t \\ \dfrac{\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t & \dfrac{\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 t & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right) & \dfrac{1}{2}\sin^2\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}。$$

取 $M=2\pi$，那么

$$\begin{bmatrix} \int_t^{t+2\pi}\sin^2\tau\,\mathrm{d}\tau & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\int_t^{t+2\pi}\sin\tau\sin\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\tau \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\int_t^{t+2\pi}\sin\tau\sin\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\tau & \dfrac{1}{2}\int_t^{t+2\tau}\sin^2\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\tau \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \int_0^{2\pi}\sin^2\tau\,\mathrm{d}\tau & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin\tau\sin\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\tau \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin\tau\sin\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\tau & \dfrac{1}{2}\int_0^{2\tau}\sin^2\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\tau \end{bmatrix} = \pi\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}。$$

不难验证，最后得到的矩阵是正定的。在式(5.6.2)中，k_1 和 k_2 分别可以取成是 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\pi$ 和 $\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}\pi$，因此这时的输出 $y(t)$ 是持续激励。 □

显然，如果将系统的传递函数换成

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix},$$

那么不管什么输入，系统的输出两个分量是一样的，这时也不可能使得式(5.6.2)成立。因此，$y(t)$ 是否为持续激励，不仅取决于输入，也取决于传递函数。

从例 5.6.1 可以得到看出要通过式(5.6.2)来验证一个输出信号是否持续激励并不是一件轻松的工作，因而需要寻找有效的判别条件。根据(5.6.2)，因为对任意的 $a\in\mathbb{R}^n$，

$$a^{\mathrm{T}}\left(\int_t^{t+M}\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau\right)a = \int_t^{t+M}a^{\mathrm{T}}\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)a\mathrm{d}\tau = \int_t^{t+M}(a^{\mathrm{T}}\varphi(\tau))^2\mathrm{d}\tau \geqslant 0,$$

所以对任意的 $M>0$，积分 $\int_t^{t+M}\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是实数域上的半正定的 $n\times n$ 矩阵。为了进一步研究的需要，我们引入下面的定义。

定义 5.6.2　设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 是 n 个 p 维的向量值映射，称在定义域内的闭区间 $[t_1,t_2]$ 上，这 n 个向量值映射关于实数域 $\mathbb{R}$ 是线性相关的，如果存在不全为零的实数 a_1，

$a_2,\cdots,a_n$，使得

$$a_1\varphi_1(t)+a_2\varphi_2(t)+\cdots+a_n\varphi_n(t)\equiv 0,\quad t\in[t_1,t_2]。$$

否则，称它们在$[t_1,t_2]$上关于实数域$\mathbb{R}$是线性无关的，在意义不止于混淆的时候，简称线性无关。□

线性无关也称为线性独立。显然，在$[t_1,t_2]$上关于实数域$\mathbb{R}$是线性无关的蕴含着对于定义域中任意包含$[t_1,t_2]$的区域内都是线性无关的。

判别一组向量值映射是否线性相关，有下面的定理，我们将它的证明留做练习。

设$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$是$n$个$p$维的向量值映射，并在区间$[t_1,t_2]$上存在至少$n-1$阶导数。记

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1^{\mathrm{T}}(t)\\ \varphi_2^{\mathrm{T}}(t)\\ \vdots\\ \varphi_n^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix},\tag{5.6.3}$$

则$\Phi(t)$是定义在$[t_1,t_2]$上的$n\times p$函数矩阵。用$\Phi^{(i)}(t)$表示对$\Phi(t)$的元素求i阶导数得到的矩阵。

定理 5.6.1 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$在$[t_1,t_2]$上线性无关的充分必要条件是存在$t_0\in[t_1,t_2]$，使得

$$\operatorname{rank}[\Phi(t_0)\quad\Phi^{(1)}(t_0)\quad\cdots\quad\Phi^{(n-1)}(t_0)]=n。$$ □

注意$[\Phi(t_0)\quad\Phi^{(1)}(t_0)\quad\cdots\quad\Phi^{(n-1)}(t_0)]$是$n\times np$的实数矩阵。

例 5.6.2 设$\varphi_1(t)=1,\varphi_2(t)=t,\varphi_3(t)=t^2$是三个1维的函数，但是它们在$[0,\infty)$上的任意一个子区间上都线性无关。

这是因为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}1\\ t\\ t^2\end{bmatrix},\quad[\Phi(t_0)\quad\Phi^{(1)}(t_0)\quad\Phi^{(2)}(t_0)]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ t_0 & 1 & 0\\ t_0^2 & 2t_0 & 1\end{bmatrix}。$$ □

这个例子说明，向量值映射在实数域上的线性无关与实数向量是不同的，三个1维的函数，在实数域上是可以线性无关的。

关于映射的线性无关有下面的重要定理。

定义 5.6.3 设$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$是$n$个$p$维的向量值映射，矩阵$\Phi(t)$如式(5.6.3)所定义，那么

$$W(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\Phi(\tau)\Phi^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

称为$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$在$[t_1,t_2]$上的**Gram矩阵**。 □

从定义直接得知对任意的$t_1<t_2$，Gram矩阵$W(t_1,t_2)$总是$n\times n$的半正定矩阵。

定理 5.6.2　如果 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$是在$[t_1,t_2]$上连续的，那么在$[t_1,t_2]$上线性无关的充分必要条件是它的 Gram 矩阵 $W(t_1,t_2)$可逆。

证明：必要性。如果它的 Gram 矩阵 $W(t_1,t_2)$不可逆，那么存在非零实向量 $a\in\mathbb{R}^n$，使得 $W(t_1,t_2)a=0$。于是

$$a^{\mathrm{T}}W(t_1,t_2)a=\int_{t_1}^{t_2}a^{\mathrm{T}}\Phi(\tau)\Phi^{\mathrm{T}}(\tau)a\mathrm{d}\tau=\int_{t_1}^{t_2}(a^{\mathrm{T}}\Phi(\tau))^2\mathrm{d}\tau=0。$$

$a^{\mathrm{T}}\Phi(t)\equiv0,t\in[t_1,t_2]$，就是 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$在$[t_1,t_2]$上线性相关。

充分性。如果 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$在$[t_1,t_2]$上线性相关。就是存在不全为零的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得

$$a_1\varphi_1(t)+a_2\varphi_2(t)+\cdots+a_n\varphi_n(t)\equiv0,\quad t\in[t_1,t_2]。$$

定义 $a=[a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_n]^{\mathrm{T}}$，那么 $a\neq0$，而 $\Phi^{\mathrm{T}}(t)a=0$，进一步

$$W(t_1,t_2)a=\int_{t_1}^{t_2}\Phi(\tau)\Phi^{\mathrm{T}}(\tau)a\mathrm{d}\tau=0$$

故而 $W(t_1,t_2)$不可逆。　□

回到关于持续激励的讨论。记系统的输出为 $y(t)$，那么 $y(t)$总可以分解成稳态部分$y_{\mathrm{s}}(t)$和暂态部分 $y_{\mathrm{t}}(t)$，即 $y(t)=y_{\mathrm{s}}(t)+y_{\mathrm{t}}(s)$，其中的暂态部分在 $t\to\infty$是一个无穷小，即满足 $\lim\limits_{t\to\infty}y_{\mathrm{t}}(t)=0$。在例 5.6.1 中，当输入为阶跃信号时，输出 $y(t)$可以分解成

$$y(t)=\begin{bmatrix}1\\1-\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix},\quad y_{\mathrm{s}}(t)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad y_{\mathrm{t}}(t)=\begin{bmatrix}0\\-\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}。$$

根据频率特性理论，一个稳定 SIMO 系统，它的传递函数矩阵为 $G(s)$，那么当输入是 $A\sin\omega t$的时候，它的稳态输出就是 $y_s(t)=A|G(\mathrm{i}\omega)|\sin(\omega t+\phi)$①，其中 $\phi=\angle G(\mathrm{i}\omega)$，就是说它的稳态输出是一个同频率的正弦信号，稳态输出的振幅是输入的$|G(\mathrm{j}\omega)|$倍，相位则超前了$\angle G(\mathrm{i}\omega)$弧度。继续考虑例 5.6.1，当输入为 $\sin t$ 时，

$$G(\mathrm{i})=\begin{bmatrix}1\\\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\end{bmatrix},$$

所以系统的稳态输出是

$$y_{\mathrm{s}}(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\end{bmatrix}。$$

将输出 $y(t)$的稳态部分 $y_{\mathrm{s}}(t)$写成是分量形式，

① 记号 $A|G(\mathrm{i}\omega)|\sin(\omega t+\phi)$的意义是：如果 $G(s)=[g_1(s)\ \cdots\ g_n(s)]^{\mathrm{T}}$，那么 $A|G(\mathrm{i}\omega)|\sin(\omega t+\phi)=A[|g_1(\mathrm{i}\omega)|\sin(\omega t+\angle g_1(\mathrm{i}\omega))\ \cdots\ |g_n(\mathrm{i}\omega)|\sin(\omega t+\angle g_n(\mathrm{i}\omega))]^{\mathrm{T}}$。

$$y_s(t)=\begin{bmatrix} y_{1s}(t) \\ y_{2s}(t) \\ \vdots \\ y_{rs}(t) \end{bmatrix},$$

如果 $y_{1s}(t),y_{2s}(t),\cdots,y_{ms}(t)$在$[0,\infty)$上是线性无关的，那么它的 Gram 矩阵 $W(0,t)=\int_0^t y_s(\tau)y_s^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 总是可逆矩阵。我们可以叙述下面的定理。

定理 5.6.3 如果系统输出 $y(t)$至少是 $n-1$ 阶连续可导的，且它的稳态部分满足：

(1) $y_{1s}(t),y_{2s}(t),\cdots,y_{ms}(t)$在$[0,\infty)$是线性无关的；

(2) $y_{1s}(t),y_{2s}(t),\cdots,y_{ms}(t)$在$[0,\infty)$上有界；

那么 $y(t)$是持续激励。

证明：记

$$W_s(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} y_s(\tau)y_s^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

那么根据定理 5.6.2，条件 1 蕴含 $W_s(t_1,t_2)$是可逆矩阵。将 $W_s(t_1,t_2)$写成 $W_s(t_1,t_1+M)$。

如果不存在 M 和 k_2 使得 $W_s(t_1,t_1+M)\leqslant k_2 I$，那么随意固定 M，存在 t_{1i}，$i=1,2,\cdots$，使得 $W_s(t_{1i},t_{1i}+M)>iI$。对每个 i 存在$\alpha\in\mathbb{R}^n$，$|\alpha|=1$，使得 $\alpha_i^{\mathrm{T}}W_s(t_{1i},t_{1i}+M)\alpha_i>i$。就是

$$\alpha_i^{\mathrm{T}}W_s(t_1,t_2)\alpha_i=\int_{t_i}^{t_i+M}\alpha_i^{\mathrm{T}}y_s(\tau)y_s^{\mathrm{T}}(\tau)\alpha_i\mathrm{d}\tau=\int_{t_i}^{t_i+M}\|\alpha_i^{\mathrm{T}}y_s(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau$$

$$=\|\alpha_i^{\mathrm{T}}y_s(\bar{t}_i)\|^2M\leqslant\|y_s(\bar{t}_i)\|^2M,$$

其中 $\bar{t}_i\in[t_i,t_i+M]$，而最后一个等号是应用了积分中值定理。因此 $\|y_s(\bar{t}_i)\|>M^{-1}\sqrt{i}$，因为 M 是固定的，这和条件(2)矛盾。

最后证明存在 M 和 k_1 使得 $W(t_1,t_1+M)\geqslant k_1 I$。这是因为对于 $y_s(t)$的任何一个分量 $y_{js}(t)$，$j=1,2,\cdots,m$，它不能在一个开区间上恒等于零；而它又因为是稳态分量，当 $t\to\infty$时不可能趋向零，则对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在 $M>0$，使得 $W(t_1,t_1+M)>\varepsilon I$ 对任意的 t_1 成立。于是 $y(t)$是持续激励。 □

定理 5.6.3 给出一个比较容易应用的持续激励的判断。需要指出的是，定理 5.6.3 可以适用 MIMO 系统，而不需要限制系统是 SIMO 的。

应用定理 5.6.3，继续考虑例 5.6.1。当输入为 $\sin t$ 时，稳态输出是

$$y_s(t)=\begin{bmatrix} \sin t \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix},$$

由于

$$[y_s(t)\quad \dot{y}_s(t)]=\begin{bmatrix}\sin t & \cos t\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right) & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\end{bmatrix},$$

$\det[y_s(t)\quad \dot{y}_s(t)]\neq 0$，因此 $y_s(t)$的分量在实数域上线性无关，而它的分量都是有界的，因此一定是持续激励。

5.6.2　自适应线性观测器

这一小节的目的是应用持续激励信号来设计 Lurć 型微分包含系统的自适应观测器，在自适应观测器设计中，应用持续激励是比较常见的(例如参阅文献[7])。我们先叙述一个引理。

引理 5.6.1　如果 $\varphi(t)$是 n 维的持续激励信号，且 $\gamma(t):\mathbb{R}(\geqslant 0)\to\mathbb{R}$，满足$|\gamma(t)|\leqslant\beta e^{-\alpha t}$ $(\alpha,\beta>0)$，那么

$$\dot{\theta}(t)=-\varphi(t)\varphi^{\mathrm{T}}(t)\theta(t)+\varphi(t)\lambda(t)$$

的解是全局渐近稳定的。

证明：这个微分方程的解是

$$\theta(t)=e^{-\int_0^t\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau}\theta(0)+\int_0^t e^{-\int_s^t\varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau}\varphi(s)\lambda(s)\mathrm{d}s,$$

得到

$$\theta(t)\leqslant e^{-k_1 t}\parallel\theta(0)\parallel+\int_0^t e^{-k_1(t-s)}\parallel\varphi(s)\lambda(s)\parallel\mathrm{d}s。$$

由于 $\varphi(t)$是持续激励信号，因此 $\parallel\varphi(t)\parallel$ 有界，设 $\parallel\varphi(t)\parallel\leqslant A$，同时总可以使得 $\alpha\neq k_1$，那么

$$\theta(t)\leqslant e^{-k_1 t}\parallel\theta(0)\parallel+A\int_0^t e^{-k_1(t-s)}e^{-\alpha s}\mathrm{d}s\leqslant e^{-k_1 t}\parallel\theta(0)\parallel+\frac{A}{k_1-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-k_1 t})。$$

引理获证。　□

现在考虑式(5.6.1)的自适应观测器设计。继续使用 5.4 节中的记号，其中的 $M=I-G(CG)^{-1}C$，当(C,A,G)的相对阶是 1 的时候，M 存在但不可逆。根据 5.4 节的结论，当(C,A,G)是能控又能观的最小相位系统的时候，(MA,C)是可检测的，因此存在 L 使得 $MA-LC$ 是 Hurwitz 矩阵。

定理 5.6.4　考虑 Lurć 型微分包含系统(5.6.1)，如果：

(1) (C,A,G)是能控又能观的最小相位系统，而且其相对阶为 1；

(2) $f(y,u)$使得 $\xi(t)$是持续激励信号，这里的 $\xi(t)$满足下列微分方程：

$$\dot{\xi}=(MA-LC)\xi-Mf(y,u),\tag{5.6.4}$$

其中 L 使得 $MA-LC$ 是 Hurwitz 矩阵；

那么

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= (MA-LC)\eta + MBu - Mf(y,u)\,\hat{\theta} + \xi\dot{\hat{\theta}} + MAG(CG)^{-1}y,\\ \hat{x} &= \eta + G(CG)^{-1}y\end{aligned} \tag{5.6.5}$$

是自适应微分包含系统(5.6.1)的渐近**自适应线性观测器**,其中的自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}} = \xi^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}(y - C\hat{x})。 \tag{5.6.6}$$

证明:根据定理 5.4.2 的证明,可以从式(5.6.1)得到

$$\omega = (CG)^{-1}(CAx + CBu - Cf(y,u)\theta - \dot{y}),$$

因此系统(5.6.1)的第一个方程等于

$$\dot{x} = MAx + MBu - Mf(y,u)\theta + G(CG)^{-1}\dot{y}。 \tag{5.6.7}$$

由式(5.6.5)的第二式得到

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (MA-LC)(\hat{x} - G(CG)^{-1}y) + MBu - Mf(y,u)\,\hat{\theta} + \xi\dot{\hat{\theta}} + \\ &\quad MAG(CG)^{-1}y + G(CG)^{-1}\dot{y}\\ &= (MA-LC)\,\hat{x} + Ly + MBu - Mf(y,u)\,\hat{\theta} + \xi\dot{\hat{\theta}} + G(CG)^{-1}\dot{y}。\end{aligned} \tag{5.6.8}$$

记 $e=x-\hat{x}$,将式(5.6.7)减去式(5.6.8),得到

$$\dot{e} = (MA-LC)e - Mf(y,u)\,\tilde{\theta} - \xi\dot{\hat{\theta}},$$

其中$\tilde{\theta}=\theta-\hat{\theta}$,又根据假定将 θ 作为常数处理,因此上式中取$\dot{\tilde{\theta}}=-\dot{\hat{\theta}}$。

为了考察 e 的收敛性,定义 $\zeta=e-\xi\tilde{\theta}$,那么

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= \dot{e} - \dot{\xi}\tilde{\theta} + \xi\dot{\hat{\theta}}\\ &= (MA-LC)e - Mf(y,u)\,\tilde{\theta} - \dot{\xi}\tilde{\theta}\\ &= (MA-LC)\zeta + (MA-LC)\xi\tilde{\theta} - Mf(y,u)\,\tilde{\theta} - \dot{\xi}\tilde{\theta}\\ &= (MA-LC)\zeta + ((MA-LC)\xi - Mf(y,u) - \dot{\xi})\,\tilde{\theta}。\end{aligned}$$

根据式(5.6.4),得到

$$\dot{\zeta} = (MA-LC)\zeta。$$

由于 $MA-LC$ 是 Hurwitz 矩阵,因此存在 $\alpha,\beta>0$,使得$|e(t)|<\beta\mathrm{e}^{-\alpha t}$。

根据自适应律(5.6.6),

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\xi^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}Ce = -\xi^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C\xi\tilde{\theta} - \xi^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C\zeta。 \tag{5.6.9}$$

根据定理的条件 2 和$|\zeta(t)|<\mathrm{e}^{-\alpha t}$,应用引理 5.6.1,得$\tilde{\theta}\to 0(t\to\infty)$。又由于 ξ 是持续激励,因而是有界的,这样 $e=\zeta+\xi\tilde{\theta}\to 0(t\to\infty)$。 □

关于定理 5.6.4 可以有如下的注释。

注 1 与 5.4 节不同的是,我们没有采用 Lyapunov 函数来求取自适应律,而是在为了保证辅助变量 ζ 的稳定时引进了自适应律(5.6.6)。这样产生的自适应律保证了估计参数$\hat{\theta}$会收敛到真值 θ。 □

注 2 在式(5.6.4)中,$MA-LC$ 是 Hurwitz 矩阵,稳态部分是否为持续激励就取决于 $Mf(y,u)$的选取了。在练习中将对 $\xi(t)$为持续激励的条件做进一步的讨论,可以直接根据

$f(y,u)$来判别 $\xi(t)$的持续激励性。 □

注 3　式(5.6.9)是一个时变的非齐次线性方程，持续激励的作用在于保证式(5.6.9)的稳定性，如果有其他条件可以保证这个方程的稳定性，那么完全可以用它来替代持续激励，尤其在一些具体的例子中，会有更实用的条件。 □

例 5.6.3　考虑 Luré 型微分包含系统，

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\omega+\begin{bmatrix}0\\ u^2+y\end{bmatrix}\theta,\quad y=x_1;$$

集合值映射为

$$\nu(x_1,x_2)=\begin{cases}x_1+x_2+6, & x_1+x_2<-6;\\ [-x_1-x_2-6,x_1+x_2+6], & -6\leqslant x_1+x_2<0;\\ [x_1+x_2-6,-x_1-x_2+6], & 0\leqslant x_1+x_2<6;\\ -x_1-x_2+6, & 6\leqslant x_1+x_2。\end{cases}$$

图 5.15 给出集合值映射 $\nu(x_1,x_2)$的图像，在菱形内的任意一条满足函数要求的曲线都可以是集合值映射的选择。从图 5.16 可以看出 $\nu(x_1,x_2)$不是单调的，因此不能保证这个 Luré 系统的解集只有一个解。但是对于每个分段连续函数，系统存在唯一确定的解，因此它是适定的。

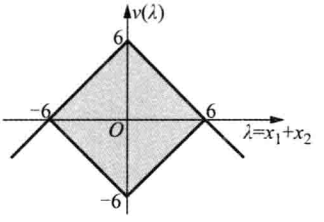


图 5.15　例 5.6.2 的集合值映射

容易验证 $c^{\mathrm{T}}g=1$，系统的零为-1，因此定理 5.6.4 的条件 1 满足。又取 $l=[0.5\quad 1]^{\mathrm{T}}$，那么

$$M=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad MA-lc^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-0.5 & 0\\ -1.5 & -1\end{bmatrix}。$$

$MA-lc^{\mathrm{T}}$ 是 Hurwitz 矩阵。这时式(5.6.4)就是

$$\dot{\xi}(t)=\begin{bmatrix}-0.5 & 0\\ -1.5 & -1\end{bmatrix}\xi(t)+\begin{bmatrix}0\\ u^2+y\end{bmatrix}。$$

线性自适应观测器为

$$\dot{\eta}=\begin{bmatrix}-0.5 & 0\\ -1.5 & -1\end{bmatrix}\eta+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}u-\begin{bmatrix}0\\ u^2+y\end{bmatrix}\hat{\theta}+\xi\dot{\hat{\theta}}+\begin{bmatrix}0\\ -1.5\end{bmatrix}y,\quad \hat{x}=\eta+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}y,$$

自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}}=[\xi_1\quad \xi_2]\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}(y-\hat{x}_1)=\xi_1(y-\hat{x}_1)。$$

为了使得 $\xi(t)$为持续激励，将 $u(t)$取成 $u(t)=3\sin t$。

我们对 $\nu(x_1,x_2)$取两个选择：

$$\omega_1=\begin{cases}\lambda+6, & \lambda<0,\\ -\lambda+6, & 0\leqslant\lambda;\end{cases}\qquad \omega_2=\begin{cases}\lambda+6, & \lambda<-6,\\ -\lambda-6, & -6\leqslant\lambda<0,\\ \lambda-6, & 0\leqslant\lambda<6,\\ -\lambda+6, & 6\leqslant\lambda;\end{cases}$$

其中的 $\lambda=x_1+x_2$。ω_1 和 ω_2 分别是这个集合值映射的边界(见图 5.15)。显然这两个选择会造成不同的状态轨线。这也说明用带有集合值映射的观测器必定不能达到状态的渐近跟踪。

图 5.16 和图 5.17 分别给出集合值映射取成 ω_1 和 ω_2 时误差曲线,其中的未知参数 θ 取成 2。在图 5.16 中系统的初值为 $x(0)=[2\quad 1]^{\mathrm{T}}$,辅助变量 $\xi(t)$ 的初值为 $\xi(0)=[-0.8\quad 2]^{\mathrm{T}}$,观测器的初值为 $\eta(0)=[1\quad 2]^{\mathrm{T}}$,自适应律中的初值是 $\hat{\theta}(0)=1.5$。在图 5.17 中系统的初值为 $x(0)=[0\quad 1]^{\mathrm{T}}$,辅助变量 $\xi(t)$ 的初值为 $\xi(0)=[-1.6\quad 1]^{\mathrm{T}}$,观测器的初值为 $\eta(0)=[-1\quad -2]^{\mathrm{T}}$,自适应律中的初值是 $\hat{\theta}(0)=3$。

图 5.16 和图 5.18 显示,观测器能够很好工作,参数收敛也是很快的。图 5.17 给出了辅助变量 ξ 的图像。其中 ξ_1 因为没有受到 $f(y,u)$ 的影响,因此它是一条单调衰减的曲线,其稳态分量为 0;而 ξ_2 的稳态分量是一条振荡曲线,它是有界的,并具备持续激励的特性。 □

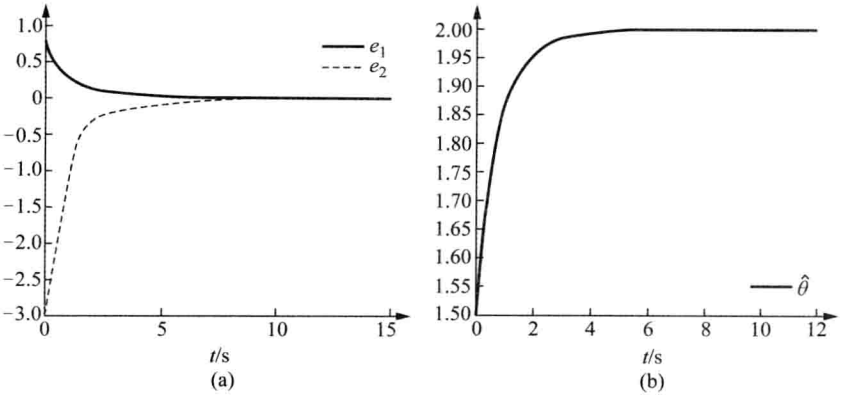


图 5.16 当 ω_1 时自适应观测器工作情况

(a) 观测误差;(b) 未知参数跟踪

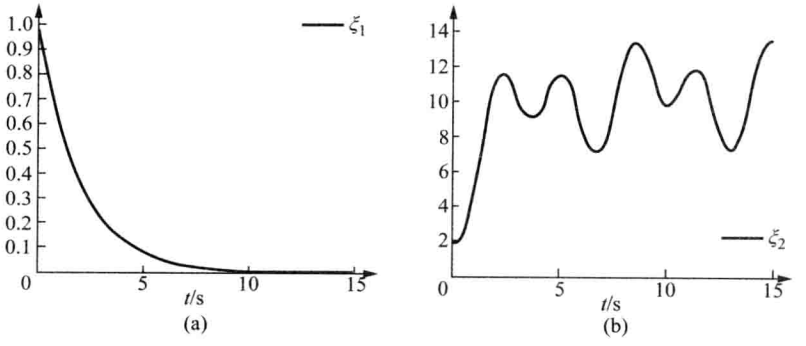


图 5.17 当选择位 ω_1 时辅助变量 ξ 的图像

(a) ξ_1 的图像;(b) ξ_2 的图像

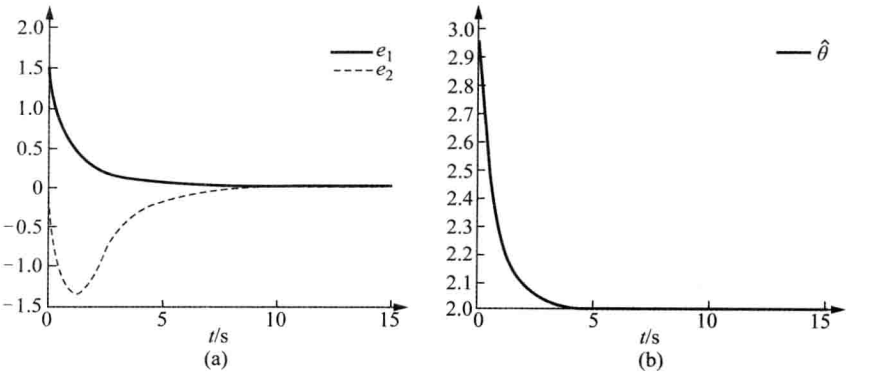


图 5.18　当 ω_2 时自适应观测器工作情况

(a) 观测误差;(b) 未知参数跟踪

练习

1. 考虑系统

$$\dot{x} = Mx + N\dot{y} + Bu + f(x,u)\theta,$$
$$y = Cx,$$

其中 $\|\theta\| \leqslant \gamma_1$ 的界，$f(x,u)$满足 Lipshitz 条件，Lipshitz 常数是 γ_2。此外还满足：

(1) 存在正定矩阵 P,Q 和适当维数的矩阵 L，使得

$$P(M-LC) + (M-LC)^{\mathrm{T}}P = -Q;$$

(2) 对于上述方程中的 P 和 Q 成立 $\lambda_{\min}(Q) > 2\gamma_1\gamma_2\lambda_{\max}(P)$;

(3) 存在 $h(x,u)$，使得 $h(x,u)C = f^{\mathrm{T}}(x,u)P$。

那么该系统存在自适应观测器。

2. 讨论在式(5.6.1)中，方程 $h(x,u)C = f^{\mathrm{T}}(x,u)M^{\mathrm{T}}P$ 一般不可解出 $h(x,u)$，给出可以解出的一个条件。

3. 如果 $\varphi(t)$是持续激励信号，那么 $\varphi(t)$在$[0,\infty)$上是有界的。

4. 试证明定理 5.6.1。

5. 证明不等式 $k_1 I \leqslant \int_t^{t+M} \varphi(\tau)\varphi^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant k_2 I$ 等价于对于任意的单位向量 α，成立

$$k_1 \leqslant \int_t^{t+M} [\alpha^{\mathrm{T}}\varphi(\tau)]^2 \mathrm{d}\tau \leqslant k_2。$$

6. 讨论

$$y(t) = \begin{bmatrix} a \\ b\sin\omega_0 t \end{bmatrix}$$

当 a,b,ω_0 满足什么条件时，它是持续激励。

7. 函数 $u:[0,\infty) \to \mathbb{R}^n$称为平稳信号，如果下面的极限关于 t 存在

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_{t}^{t+T} u(\tau)u^{\mathrm{T}}(t+\tau)\mathrm{d}\tau,$$

这个极限是 t 的函数，并称为 u 的自协方差矩阵，记作 $R_u(t)$。进一步定义 $R_u(t)$的 Fourier 变换

$$S_u(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_u(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

$S_u(s)$称为 u 的谱测度。一个平稳信号 u 称为 k 阶多频的，如果 $S_u(\omega)$在 $\omega\in\mathbb{R}$（实数集）上至少有 k 个不同的非零点，这些非零实数称为 u 的支集。

验证：(1) $u=c(c\neq 0)$，那么它的支集只有一个元素，即它是 1 阶多频的。

(2) $u=\sin\omega_0 t(\omega_0\neq 0)$，那么它的支集有两个元素，即它是 2 阶多频的。

(3) $u=\sum_{i=1}^{l} A_i\sin\omega_i t$，$(A_i\neq 0,\omega_i\neq 0,\omega_i\neq\omega_j,i\neq j)$，它的支集有 $2l$ 个元素，即它是 $2l$ 阶多频的。

8. 已知定理：设 $y(s)=G(s)u(s)$，$G(s)$是 $n\times 1$ 的传递函数，那么当存在 n 个不同的实数 $\omega_1,\cdots,\omega_n$，使得 $G(\mathrm{i}\omega_1),\cdots,G(\mathrm{i}\omega_n)$在复数域上线性无关时，$y(t)$是持续激励信号的充分必要条件是 u 是 n 阶多频的。根据这个定理判别使得 $y(t)$是持续激励的条件，其中的

$$G(s)=\left[\frac{1}{s+1}\quad\frac{s-1}{(s+1)^2}\right]^{\mathrm{T}}。$$

9. 有 Luré 型微分包含系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0.5 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0.5 & 0.6 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\omega+\begin{bmatrix}0\\u^2\\0\end{bmatrix}\theta,$$

$$\omega\in\nu(\lambda),$$

$$y=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},$$

其中的集合值映射 $\nu(\lambda)$同例 5.6.1，但是 $\lambda=x_1+x_2+x_3$，设计它的线性自适应观测器，其中的 $u(t)$可以取成 $u(t)=2\sin t+2$，并用仿真验证设计的正确性。

参 考 文 献

[1] J-P, Aubin A. Cellina, Differential Inclusions—Set-Valued Maps and Viability Theory [M]. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] Simirnov G V. Introduction to the Theory of Differential Inclusions [M]. AMS, Rhode Island, 2002.

[3] Eillott H. Lieb, Micheal Loss. 分析学[M]. 王斯雷,译. 北京:高等教育出版社,2006.

[4] J. C. A de Bruim, A. Doris, N. van de Wouw, et al. Control of mechanical motion systems with non-collocation of actuation and friction: A Popov criterion approach for input-to-state stability and set-valued nonlinearities [J]. Automatica 2009, 45: 405-415.

[5] 楼红卫,林伟. 常微分方程[M]. 上海:复旦大学出版社,2007.

[6] 朱德明,韩茂安. 光滑动态系统[M]. 上海:华东师范大学出版社,1993.

[7] 韩正之,陈彭年,陈树中. 自适应控制[M]. 北京:清华大学出版社,2011.

[8] 李雷,吴从炘. 集值分析[M]. 北京:科学出版社,2006.

[9] 秦松喜. 集值映象与微分包含[M]. 厦门:厦门大学出版社,2008.

[10] Aubin J P, Eckeland I. Applied Nonlinear Analysis [M]. Wiley-Interscience, New York, 1984.

[11] Hu T, Lin Z. Properties of the composite quadratic Lyapunov functions [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 2004, 49(7): 1162-1167.

[12] Hu T, Teel A, Zaccarian L. Stability and performance for saturated systems via quadratic and nonquadratic Lyapunov functions [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 2006, 51(11): 1770-1780.

[13] Halany A. Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags [M]. Academy Press, New York, 1966.

[14] Slotine. 应用非线性控制[M]. 李卫平,蔡自兴,译. 北京:国防工业出版社,1992.

[15] 李清泉. 自适应控制系统理论、设计与应用[M]. 北京:科学出版社,1990.

[16] Anderson B D O. A system theory criterion for positive real matrices [J]. SIAM J. Control, 1967, 5(2): 172-182.

[17] Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control [J], Int. J. Robust Nonlinear Control, 1994, 4(4): 421-448.

[18] Ly J H, Safonov M G, Ahmad F. Positive real Parrott Theorem with Application to LMI control synthesis [C]. Proc. ACC, Baltimore, MD, 1994: 50-52.

[19] Huang C.-H, Ioannon P A, Maroulas J, et al. Design of strictly positive real systems using constant output feedback [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1999, 44(3): 569-573.

[20] Iwasaki T, Skelton R E. A complete to the general H_∞ problem: LMI conditions and state-space formulas [C]. Proc. ACC, CA, June, 1993: 605-609, San Fracisco.

[21] 韩正之. 线性系统的(A,B)特征子空间与大系统分散控制[M]. 北京:科学出版社,1993.

[22] Hui S, Zak S H. Observer design for systems with unknown inputs [J]. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 2005, 15(4): 431-446.

[23] Kalsi K, Lian J, Hui S, et al. Sliding-mode observers for systems with unknown inputs: A high-gain approach [J]. Automaitca, 2010, 46: 347-353.

索　引

中文名词	英文名词	所在页码
$C([a,b],\mathbb{R})$	$C([a,b],\mathbb{R})$	2
$L_p([a,b],\mathbb{R})$	$L_p([a,b],\mathbb{R})$	4
$AC([a,b],\mathbb{R})$	$AC([a,b],\mathbb{R})$	5
1 的分解	factorization of unit	51
Alaoglu 定理	Alaoglu theorem	9
Arzela-Ascoli 定理	Arzela-Ascoli theorem	6
Banach 空间	Banach space	6
Brouwer 不动点定理	Brouwer fixed-point theorem	58
Caratheodory 定理	Caratheodory theorem	15
Cartesian 积	Cartesian product	2
Cauchy 序列	Cauchy sequence	6
Dini 导数	Dini derivative	86
Euclid 范数	Euclidian norm	3
Fatou 引理	Fatou lemma	8
Fenchel 不等式	Fenchel inequality	33
Gram 矩阵	Gram matrix	236
Gronwall 不等式	Gronwall inequality	66
Halany 不等式	Halany inequality	167
Hessian 矩阵	Hessian matrix	24
Hilbert 空间	Hilbert space	9
Hurwitz 向量	Hurwitz vector	197
Jensen 不等式	Jensen inequality	20
Kakutani 不动点定理	Kakutani fixed-point theorem	59
Lebesgue 控制收敛定理	Lebesgue dominated convergence theorem	8
Levi 单调收敛定理	Levi monotone convergence theorem	8
Lipschitz 集合值映射	Lipschitz set-valued mapping	41
Luenberger 观测器	Luenberger observer	205
Luré 系统	Luré system	185
Luré 型微分包含系统	Luré differential inclusion system	185
Micheal 选择定理	Micheal selection theorem	53
Minkowski 函数	Minkowski function	23

Minty 定理	Minty theorem	97
Popov 积分不等式	Popov integral inequality	184
Riesz 定理	Riesz theorem	8
Robinson-Ursescu 定理	Robinson-Ursescu Theorem	110
Schur 补定理	Schur complement theorem	145
Schwarz 不等式	Schwarz inequalitiy	10
T- 能控集	T-controllable set	125
Weierstress 定理	Weierstress theorem	6
Yosida 逼近	Yosida approximation	99
伴随过程	adjoint process	106
伴随切锥	adjoint tangent cone	45
饱和函数	saturated function	174
闭集	closed set	6
闭实数集	closed real number set	2
不变锥	invariant cone	117
不变子空间	invariant subspace	117
层集	level set	21
超渐近稳定系统	absolutely asymptotically stable system	185
超稳定系统	absolutely stable system	185
承载子空间	carrying subspace	15
持续激励	persistent exciting	233
次微分	subdifferential	26
单纯形	simplex	14
单调集合值映射	monotone set-valued mapping	94
对偶系统	dual system	125
多胞体	polytopic	147
多胞体微分包含	polytopic differential inclusion	147
法锥	normal cone	42
范数	norm	3,109
方向导数	directional derivative	25
分离设计原理	principle of separation	212
共轭函数	conjugate function	33
共轭空间	conjugate space	7
共轭锥	conjugate cone	42
关系	relation	2
函数	function	3
缓解	mild solution	102

极端点	extreme point	155
极锥	polar cone	42
集合值映射	set-valued mapping	37
降维观测器	reduced order observer	145
紧集	compact set	6
局部紧映射	locally compact mapping	56
局部有限开覆盖	locally finite open covering	52
距离空间	distance space	3
开集	open set	6
可达集	reachable set	74
σ-可选择	σ-selection	58
连续映射	continuous mapping	38
幂集	power set	2
内积空间	inner-product space	9
能控性	controllability	130
切锥	tangent cone	42
弱指数稳定	weakly exponentially stable	135
上半连续函数	upper-semi continuous function	29
上半连续映射	upper-semi continuous mapping	37
ε-上半连续映射	ε-upper-semi continuous mapping	38
上行图	epigraph	21
适定性问题	problem of well-posedness	206
死区函数	dead zone function	174
松弛定理	relaxedness theorem	82
特征向量	eigenvector	116
特征值	eigenvalue	116
投影	projection	10,17
凸包	convex hull	14
凸包二次型函数	convex hull function	151
凸过程	convex process	106
凸函数	convex function	1
凸化微分包含	convex differential inclusion	79
凸集	convex set	12
凸系统	convex system	125
凸锥	convex cone	42
凸组合	convex combination	14
完备空间	complete space	v

微分包含	differential inclusion	60
微分包含的 Cauchy 问题	Cauchy problem for differential inclusion	60
微分方程的 Filippov 解	Fillipov solution of differential equation	64
系统矩阵	system matrix	144
系统零	zeros of system	194
下半连续函数	lower-semi continuous function	29
下半连续映射	lower-semi continuous mapping	38
ε-下半连续映射	ε-lower-semi continuous mapping	38
线性动态输出反馈		145
线性多胞体系统		147
线性赋范空间	linear normed space	3
线性观测器	linear observer	216
线性控制系统	linear control system	144
线性映射	linear mapping	7
相对边界	relative boundary	16
相对阶	relative degree	194
相对内点	relative inner point	15
相容范数	compatible norm	7
选择	selection	16
严格凸函数	strictly convex function	20
严格正实函数	strictly positive real function	186
严格正实矩阵	strictly positive real matrix	187
映射	mapping	3
诱导范数	induced norm	7
预解式	resolvent equation	99
正切锥	tangent cone	45
正实函数	positive real function	186
正实矩阵	positive real matrix	187
支撑函数	supporting function	23
指示函数	indicative function	31
指数稳定	exponentially stable	133
终极吸引性	ultimate attractivity	180
自适应线性观测器	adaptive linear observer	240
最小范元	element with minimal norm	49
最小相位系统	minimum-phase system	195
最小选择	minimal selection	51

[General Information]
书名=微分包含控制系统理论=The Theory for Control Systems Described by Differential Conclusions
作者=韩正之, 蔡秀珊, 黄俊著
页数=250
SS号=13500486
DX号=
出版日期=2013.11
出版社=上海交通大学出版社

封面
书名
版权
前言
目录
第1章　凸集和凸函数
1.1线性赋范空间
1.1.1集合和映射
1.1.2线性赋范空间
1.1.3基础拓扑
1.1.4极限定理
1.1.5内积空间
1.2凸集
1.2.1凸集及其基本性质
1.2.2凸集的表示
1.2.3分离定理
1.3凸函数
1.3.1凸函数及其基本性质
1.3.2凸函数的例子
1.3.3凸函数的微分
1.4半连续函数
1.4.1半连续函数及其基本性质
1.4.2半连续函数的例子
第2章　集合值映射和微分包含
2.1集合值映射
2.1.1集合值映射
2.1.2集合值映射的连续性
2.1.3切锥和法锥
2.1.4集合值映射的微分
2.2集合值映射的选择
2.2.1最小选择
2.2.2　Micheal选择定理
2.2.3　Lipschitz逼近
2.2.4不动点定理
2.3微分包含及其解的存在性
2.3.1微分包含问题的提出
2.3.2微分包含Cauchy问题解的存在性
2.3.3时滞微分包含解的存在性
2.4微分包含解的定性分析
2.4.1　Lipschitz微分包含解的定性分析
2.4.2上半连续微分包含解的分析

2.4.3凸化微分包含和松弛定理
2.5微分包含系统的稳定性
2.5.1 Dini导数
2.5.2微分包含系统的稳定性
2.5.3微分包含系统稳定性的类Lyapunov判据
2.6单调微分包含
2.6.1单调微分包含及其基本性质
2.6.2 Minty定理
2.6.3 Yosida逼近
2.6.4极大单调微分包含
第3章 凸过程
3.1线性赋范空间上的凸过程
3.1.1凸过程及其伴随过程
3.1.2凸过程的范数
3.1.3凸过程的基本定理
3.2有限维空间的凸过程
3.2.1伴随过程
3.2.2凸过程的结构
3.3凸过程微分包含的能控性
3.3.1 T-能控性
3.3.2能控性
3.4凸过程微分包含的稳定性
3.4.1稳定性
3.4.2 Lyapunov函数的构造
第4章 线性多胞体控制系统
4.1多胞体系统
4.1.1线性控制系统和矩阵不等式
4.1.2线性多胞体系统
4.2凸包Lyapunov函数
4.2.1凸包二次型函数
4.2.2凸包二次型函数的层集
4.3线性多胞体系统的控制
4.3.1线性多胞体系统的反馈镇定
4.3.2带有时滞线性多胞体系统的反馈镇定
4.3.3线性多胞体系统的干扰抑制
4.4线性系统的饱和控制
4.4.1线性系统的饱和控制的集合值表示
4.4.2饱和控制的镇定设计
4.4.3饱和控制的干扰抑制
第5章 Lure型微分包含系统
5.1 Lure系统

5.1.1 Lure系统和超稳定性
5.1.2正实性和正实性引理
5.1.3超稳定性判据
5.2 Lure型微分包含系统的镇定
5.2.1 Lure型微分包含系统的实际例子
5.2.2 Lure型微分包含系统的镇定
5.2.3系统的零和相对阶
5.2.4反馈正实化
5.2.5反馈镇定——单变量系统
5.2.6反馈镇定——多变量系统
5.3 Lure型微分包含系统的Luenberger观测器和分离设计
5.3.1适定性问题
5.3.2 Luenberger型状态观测器
5.3.3应用观测器的状态反馈
5.3.4降维Luenberger型观测器
5.4 Lure型微分包含系统的线性观测器
5.4.1单变量系统
5.4.2多变量系统
5.5 Lure型微分包含系统的Luenberger型自适应观测器
5.5.1 Luenberger型自适应观测器
5.5.2 Luenberger型自适应降维观测器
5.5.3自适应观测器仿真例子
5.6 Lure型微分包含系统的线性自适应观测器
5.6.1持续激励
5.6.2自适应线性观测器
参考文献
索引